UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Curso 2017/2018

Ejercicios de Análisis Numérico

Álvaro Jiménez Calvo

Índice general

Capítulo 1

Nociones preliminares sobre problemas de valor inicial.

1.1. Ejercicio 1.1

Ejercicio 1.1. Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = (t + \sin(x(t)))^2 \\ x(0) = 3 \end{cases} \tag{1.1}$$

tiene una solución definida en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución. La función $f(t, \xi) = (t + \sin(\xi))^2$ es continua sobre cualquier rectángulo

$$R_{\alpha,\beta} = \left\{(t, \xi) \in \mathbb{R}^2 \colon |t - t_0| \leq \alpha|\xi - \xi_0| \leq \beta|\right\}$$

donde en nuestro caso, $t_0 = 0, \xi_0 = 3$. Nuestro objetivo es poder usar el Teorema de Peano (Versión Local) que afirma que si $f(t, \xi)$ es continua sobre un rectángulo $R_{\alpha,\beta}$ para ciertos $\alpha, \beta > 0$ entonces existe $x(t)$ solución del problema de valor inicial en $[t_0 - h, t_0 + h]$ donde

$$h = \text{mín}\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$$

y

$$M = \underset{(t,\xi)\in R_{\alpha,\beta}}{\text{máx}} ||f(t, \xi)||$$

Puestro que $t_0 = 0$, el problema (1.1) tiene una solución $x(t)$ definida en el intervalo $[-h, h]$. Tomamos $\alpha = 1$ de forma que

$$\begin{aligned} |f(t, \xi)| &= |t + \sin(\xi)|^2 \leq (|t| + |\sin(\xi)|)^2 \\ &\leq (1 + 1)^2 = 4 \end{aligned}$$

puesto que en $R_{1,\beta}$ tenemos que $|t| \leq 1$ y $|\sin\zeta| \leq 1$ para todo $\zeta \in \mathbb{R}$. Así, tomando cualquier valor de β mayor o igual que 4 tenemos que

$$h = \text{mín}\left\{1, \frac{\beta}{M}\right\} = 1$$

y se sigue el resultado. ∎

1.2. Ejercicio 1.2

Ejercicio 1.2. Dados $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, consideramos

$$R = \left\{(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |t - t_0| \leq \alpha, ||\xi - \xi_0|| \leq \beta\right\}$$

Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $f \in \mathcal{C}(R)$ verifica

$$||f(t, \xi)|| \leq \frac{\beta}{\alpha},\ (t, \xi) \in R$$

tiene una solución definida en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Solución. Sabemos que $f \in \mathcal{C}(R)$, luego por el Teorema de Peano (Versión Local), el problema (1.2) tiene una solución $x(t)$ definida en $[t_0 - h, t_0 + h]$, donde h se calcula como en el ejercicio anterior. Ahora, como

$$||f(t, \xi)| \leq \frac{\beta}{\alpha},\ (t, \xi) \in R$$

tenemos que

$$M = \max_{(t,\xi) \in R} ||f(t, \xi)|| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

de forma que

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\beta/\alpha}\right\} = \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$$

y así, $x(t)$ está definida en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. ■

1.3. Ejercicio 1.3

Ejercicio 1.3. Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y

$$M(r) = \max_{||x|| \leq r} ||f(x)||,\ r \geq 0$$

Si se verifica que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r} = 0$$

demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

tiene un única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Solución. Como por hipótesis $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, por el Teorema de Picard-Lindelöf, el problema (1.3) tiene solución única en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h] = [-h, h]$. Ahora bien, como

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r} = 0$$

tenemos que r crece asintóticamente más deprisa que $M(r)$. Sea

$$M = \max_{\beta \in R} ||f(\xi)|| = M(\beta)$$

donde $R_\beta = \{\xi \in \mathbb{R}^n : ||\xi|| \leq \beta\}$. Haciendo $\alpha = \beta$ tenemos que

$$h = \min \left\{ \beta, \frac{\beta}{M(\beta)} \right\}$$

y tenemos dos opciones: si $h = \beta$, haciendo $\beta \to \infty$ se tiene el resultado; si $h = \frac{\beta}{M(\beta)}$, entonces haciendo $\beta \to \infty$ se concluye que $h = \infty$ y se sigue el resultado. ■

1.4. Ejercicio 1.4

Ejercicio 1.4. Dados $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ acotada, se considera la función

$$f(t, \xi) = g(t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\xi - \beta_i|, \ (t, \xi) \in \mathbb{R}^2$$

Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

con $t_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ arbitrarios, tiene una única solución $x(t)$ que está definida en todo $\mathbb{R}$.

Solución. Veamos que $f(t, \xi)$ es lipschitziana en la segunda variable. Dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(t,\xi) - f(t,\eta)| &= \left| g(t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\xi - \beta_i| - g(t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\eta - \beta_i| \right| \\ &= |g(t)| \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(|\xi - \beta_i| - |\eta - \beta_i| \right) \right| \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \Big| |\xi - \beta_i| + |\beta_i - \eta| \Big| \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| |\xi - \eta| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se debe a que $f(t, \zeta)$ es acotada con constante de acotación M y la segunda desigualdad se debe a la desigualdad triangular inversa. De esta forma, $f(t, \zeta)$ es de Lipschitz en la segunda variable y por tanto el problema de valor inicial (1.4) tiene solución única.

1.5. Ejercicio 1.5

Ejercicio 1.5. Sea $|| \cdot ||$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $C > 0$ una constante positiva verificando que

$$||\zeta|| \geq C ||\zeta||_\infty, \ \zeta \in \mathbb{R}^n$$

Demostrar que si la función $f = \left(f^k\right)_{k=1}^n : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lipschitziana (en las dos variables) con constante de Lipschitz $L > 0$, entonces cada componente f^k es lipschitziana (en las dos variables) con constante de Lipschitz $L/C \geq 0$.

Sea $m \in \{1, \ldots, n\}$. Queremos probar que la función

$$f^k \colon [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

es lipschitziana en las dos variables con constante de Lipschitz L/C, esto es, que dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ y $t, s \in [a, b]$ tenemos que

$$|f^m(t, \xi) - f^m(s, \eta)| \leq \frac{L}{C} \left(|t - s| + ||\xi - \eta||\right)$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} |f^m(t, \xi) - f^m(s, \eta)| &\leq ||f(t, \xi) - f(s, \eta)||_\infty \\ &\leq \frac{1}{C}||f(t, \xi) - f(s, \eta)|| \\ &\leq \frac{L}{C} \left(|t - s| + ||\xi - \eta||\right) \end{aligned}$$

y se tiene el resultado. ■

1.6. Ejercicio 1.6

Ejercicio 1.6. Sea $t_0 \in [a, b], \xi_o \in \mathbb{R}^n$ y $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ tal que las funciones

$$\left\{f^i\right\}_{i=1}^n \in \mathcal{C}\left([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right) \quad \text{y} \quad \left\{\frac{\partial f^i}{\partial \xi_j}\right\}_{i,j=1}^n \in \mathcal{C}\left([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)$$

Demostrar que si, además, las funciones $\left\{\frac{\partial f^i}{\partial x i_j}\right\}_{i,j=1}^n$ están acotadas en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, se verifica que existe una única solución $x(t)$ del problema de valor inicial definida en el intervalo $[a.b]$.

Solución. Para resolver este ejercicio necesitamos un resultado previo

Teorema (Teorema del Valor Medio (en $\mathbb{R}^n$))**.** *Sea $f \colon G \to \mathbb{R}$ donde G es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Dados $x, y \in G$, entonces existe un c tal que*

$$|f(y) - f(x)| \leq ||\nabla f\left((1 - c)x + cy\right)||\, ||y - x|| \tag{1.5}$$

Veamos así que la función f es lipschitziana en la segunda variable. Sean $t \in [a, b]$ y $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} ||f(t, \xi) - f(t, \eta)|| &\leq C||f(t, \xi) - f(t, \eta)||_\infty \\ &= C \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} |f^k(t, \xi) - f^k(t, \eta)| \\ &= C|f^s(t, \xi) - f^s(t, \eta)| \\ &\leq C||\nabla f\left((1 - c)(t, \xi) + c(t, \eta)\right)|| \cdot ||(t, \xi) - (t, \eta)|| \\ &\leq C^2||\nabla f\left((1 - c)(t, \xi) + c(t, \eta)\right)||_\infty||(0, \xi - \eta)|| \\ &\leq C^2 M||\xi - \eta|| \end{aligned}$$

donde por un lado, C es una constante tal que

$$||\zeta|| \leq C||\zeta||_\infty,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$$

por otro
$$M = \max_i \{M_i\}$$
siendo M_i la constante de acotación de la derivada parcial i-ésima de f^j y $s \in \{1, \ldots, n\}$ es el índice donde se maximiza la cantidad $|f^k(t,\xi) - f^k(t,\eta)|$. De esta forma hemos probado que la función f es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz C^2M y por tanto podemos aplicar el Teorema de Picard-Lindelöf que afirma que el problema de valor inicial tiene una solución $x(t)$ única en $[a,b]$. ■

Capítulo 2

Métodos monopaso

2.1. Ejercicio 2.1

Ejercicio 2.1. Aplicar el Método de Euler (explícito) al problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

¿Es la solución obtenida una buena aproximación de las soluciones?

Solución. Tomamos $\xi_0 = 0$ en el problema de valor inicial y el paso h $(0 < h < 1)$ lo más pequeño posible (por ejemplo, del orden de 10^{-4}. Nuestra función es $f(t, x(t)) = f(x(t)) = \sqrt{(x(t)}$. El Método de Euler explícito crea una solución x_i de la forma

$$\boxed{x_0 = \xi_0\,, \quad x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x(t_i))}$$

de esta forma, $x_0 = \xi_0 = 0$ y

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(x_0) = 0 + hf(0) = 0 \\ x_2 &= x_1 + hf(x_1) = 0 + hf(0) = 0 \\ &\vdots \\ x_k &= x_{k-1} + hf(x_{k-1}) = 0 + hf(0) = 0 \end{aligned}$$

y así se obtiene la solución aproximada $x(t) \equiv 0$. Esta es una buena aproximación a *una* de las soluciones, pero como se puede comprobar, hay más de una. En particular

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{t^2}{4} \\ x_2(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \lambda \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4}, & t \ge \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

son soluciones del problema de valor inicial. ■

2.2. Ejercicio 2.2

Ejercicio 2.2. Demostrar que el error local de truncamiento para el Método de Euler (explícito) asociado a cualquier solución x de la ecuación diferencial

$$x'(t) = \alpha t + \beta, \; t \in [t_0, T]$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, verifica que

$$\overline{\tau}(h) = \begin{cases} O(h^r) \text{ para todo } r > 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ O(h) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Solución. Si $x'(t) = \alpha t + \beta$, tendremos entonces que $x''(t) = \alpha$ y que $x'''(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, T]$. El error de truncamiento $\tau(t, h)$ asociado al Método de Euler explícito viene dado por la expresión

$$\tau(t, h) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

Desarrollamos usando el Teorema de Taylor $x(t + h)$

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(\overline{\xi})$$

donde estamos denotando

$$x''(\overline{\xi}) = \begin{pmatrix} (x'')^1(\xi^1) \\ (x'')^2(\xi^2) \\ \vdots \\ (x'')^n(\xi^n) \end{pmatrix}$$

notación que seguiremos utilizando a lo largo de los ejercicios. De esta forma (1.5) se escribe ahora

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - f(t, x(t)) \\ &= \frac{1}{h} \left(x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(\overline{\xi}) - x(t) \right) - x'(t) \\ &= \frac{1}{h} \left(h(\alpha t + \beta) + \frac{h^2}{2} \alpha \right) - (\alpha t + \beta) \\ &= (\alpha t + \beta) + \frac{h}{2} \alpha - (\alpha t + \beta) \\ &= \frac{h}{2} \alpha \end{aligned}$$

Así, según si α es o no es cero, tenemos que o bien que $\overline{\tau}(h) = O(h)$ si no lo es o bien que $\overline{\tau}(h) = O(h^r)$ para todo $r > 0$ si sí que lo es. ■

2.3. Ejercicio 2.3

Ejercicio 2.3. Se considera la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in [t_0, T]$$

donde $f \in \mathcal{C}^1$. Dado $N \in \mathbb{N}$, tomando como paso $h = \frac{T - t_0}{N}$ y la red de puntos $t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, \ldots, N$, se considera el θ-método

$$\begin{cases} x_0 = \xi_0 \\ x_{i+1} = x_i + h \left[(1-\theta) f\left(t_i, x(t_i)\right) + \theta f\left(t_{i+1}, x(t_{i+1})\right) \right], \ i = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

a) Demostrar la siguiente estimación del error local de truncamiento

$$\overline{\tau}(h) \leq c \left(\frac{1}{2} + \theta \right) M_2 h$$

siendo

$$M_2 = \max_{t\in[t_0,T]} ||x''(t)||_\infty$$

y $c > 0$ una constante positiva verificando que $||\zeta|| \leq c||\zeta||_\infty$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$.

b) Concluir que el orden del θ-método es 1.

Solución. Para el primer apartado, consideramos el desarrollo de Taylor

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\overline{\xi})$$

puesto que como $f \in \mathcal{C}^1$, $x(t) \in \mathcal{C}^2$ y podemos considerar el desarrollo de orden 2. Derivando obtenemos que

$$x'(t+h) = x'(t) + hx''(\overline{\eta})$$

de forma que el error local de truncamiento viene dado por la expresión

$$\begin{aligned}
\tau(t,h) &= \frac{x(t+h)-x(t)}{h} - [(1-\theta)f(t,x(t)) + \theta f(t+h, x(t+h))] \\
&= \frac{x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\overline{\xi}) - x(t)}{h} - [(1-\theta)x'(t) + \theta(x'(t) + hx''(\overline{\eta}))] \\
&= x'(t) + \frac{h}{2}x''(\overline{\xi}) - [x'(t) - \theta x'(t) + \theta x'(t) + \theta h x''(\overline{\eta})] \\
&= \frac{h}{2}x''(\overline{\xi}) - \theta h x''(\overline{\eta}) \\
&= \frac{h}{2}\left(x''(\overline{\xi}) - 2\theta x''(\overline{\eta})\right)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}(h) = ||\tau(t,h)|| &= \frac{h}{2}||x''(\overline{\xi}) - 2\theta x''(\overline{\eta})|| \\
&\leq \frac{ch}{2}||x''(\overline{\xi}) - 2\theta x''(\overline{\eta})||_\infty \\
&\leq \frac{ch}{2}\left(||x''(\overline{\xi})||_\infty + ||2\theta x''(\overline{\eta})||_\infty\right) \\
&\leq \frac{ch}{2}(M_2 + 2\theta M_2) \\
&= \frac{ch}{2}M_2(1+2\theta)
\end{aligned}$$

De este modo tenemos que $\overline{\tau}(h) = O(h)$ y por lo tanto el θ-método tiene orden 1. ■

2.4. Ejercicio 2.4

Ejercicio 2.4. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $f \in \mathcal{C}^1$ y es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Dado $N \in \mathbb{N}$ y tomando como paso $h = \frac{T-t_0}{N}$ y la red de puntos $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, \dots, N$, se considera el Método de Euler (explícito)

$$\begin{cases} x_0 = \xi_0 \\ x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \ i = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Supongamos que se quiere obtener una aproximación de la solución exacta cuando el intervalo tiene longitud 4 y $L = 10$ de forma que $\epsilon(h) \leq 10^{-3}$. Suponiendo que $x_0 = \xi_0$ y se sabe que $\overline{\tau}(h) \leq Ch$ para cierta constante $C > 0$ conocida, ¿cómo debe elegirse N en función de C para obteneral? En particular, suponiendo que $C = 10^q$ y $N = 10^r$ con $q, r \in \mathbb{N}$, ¿cómo debe elegirse r en función de q?

Solución. Utilizamos el Teorema de Aproximación que aparece en los apuntes

$$\boxed{\epsilon(h) \leq \psi(\tilde{h})||\epsilon_0(h)|| + \frac{\psi(\tilde{h}) - 1}{L}\overline{\tau}(h)}$$

donde

$$\boxed{\psi(h) = \exp\left(\frac{L(T - t_0)}{1 - \theta hl}\right)}$$

En nuestro caso, $L = 10, T - t_0 = 4, \theta = 0, h = \frac{4}{N}$ y $\epsilon_0(h) = x(t_0) - x_0 = \xi_0 - \xi_0 = 0$ de forma que

$$\epsilon(h) \leq \frac{e^{40} - 1}{10}\frac{4C}{N}$$

y como queremos que $\epsilon(h) \leq 10^{-3}$ imponemos esta condición

$$\frac{e^{40} - 1}{10}\frac{4C}{N} \leq 10^{-3}$$

y despejamos N, obteniendo que

$$N \geq 400C\left(e^{40} - 1\right) \approx 9{,}4154 \times 10^9 C$$

Nos piden por último obtener r en función de q suponiendo que $N = 10^r$ y $C = 10^q$. Llamamos $D = 9{,}4154 \times 10^9$ de forma que

$$10^r \geq D10^q$$

y tomando logaritmos se obtiene

$$r \geq \log(D) + q$$

■

2.5. Ejercicio 2.5

Ejercicio 2.5. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \sin\left(\ln\left((x(t))^2 + 4\right)\right), \ t \in [0, 1] \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

y la secuencia $\{x_i\}_{i=1}^N$ generada a partir del Método de Euler (explícito) con paso $h = \frac{1}{N}$.

a) Demostrar que el problema tiene una única solución. Probar además que $x \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$.

b) Si $\overline{\tau}(h)$ denota el error local de truncamiento, demostrar que $\overline{\tau}(h) \leq \frac{h}{4}$.

c) Si $x(t)$ es la solución exacta del problema (2.3), probar que

$$|x(t_{i+1}) - x_{i+1}| \leq (1 + hL)\,|x(t_i) - x_i| + h|\tau(t_i, h)|$$

para $i = 0, \ldots, N - 1$. ¿Qué valores pueden tomarse como L?

d) Si se toma $x_0 = 1$, encontrar un número natural N_0 de forma que $\epsilon(h) \leq 10^{-4}$ para todo $N \geq N_0$.

Solución.

a) La función
$$f(\xi) = \sin\left(\ln\left(\xi^2 + 4\right)\right)$$
es de clase $\mathcal{C}([0,1])$ y por tanto, $x(t)$ también lo es. Para ver que (2.3) tiene solución única veamos que es la función $f(\xi)$ es lipschitziana. Sea $\xi \in [0,1]$. Tenemos que
$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|\right| &= \left|\left|\cos\left(\ln\left(\xi^2+4\right)\right)\frac{2\xi}{\xi^2+4}\right|\right| \\ &\leq \left|\left|\frac{2\xi}{\xi^2+4}\right|\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$
De esta forma, por el Teorema de Picard Lindelöf, el problema de valor inicial (2.3) tiene solución única.

b) Realizamos un desarrollo de Taylor para $x(t+h)$
$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\mu)$$
de forma que
$$\begin{aligned}\tau(t,h) &= \frac{x(t+h)-x(t)}{h} - f(t, x(t)) \\ &= \frac{x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\mu) - x(t)}{h} - x'(t) \\ &= x'(t) + \frac{h}{2}x''(\mu) - x'(t) \\ &= \frac{h}{2}\left(\cos\left(\ln\left(\mu^2+4\right)\right)\frac{2\mu}{\mu^2+4}\right)\end{aligned}$$
y por tanto
$$\overline{\tau}(h) = ||\tau(t,h)|| = \frac{h}{2}|x''(\zeta)| \leq \frac{h}{4}$$

c) Tomando de nuevo desarrollos de Taylor tenemos que
$$\begin{aligned}x(t_{i+1}) &= x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(\mu) \\ &= x(t_i) + hx'(t_i) + h\tau(t_i,h) \\ &= x(t_i) + hf\left(t_i, x(t_i)\right) + \frac{h^2}{2}x''(\mu)\end{aligned}$$
Por otro lado, el Método de Euler explícito dice que
$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\left|x(t_{i+1}) - x_{i+1}\right| &= \left|x(t_i) + hf\left(t_i, x(t_i)\right) + \frac{h^2}{2}x''(\mu) - x_i - hf\left(t_i, x_i\right)\right| \\
&= \left|\left(x(t_i) - x_i\right) - h\left(f\left(t_i, x_i\right)\right) - f\left(t_i, x(t_i)\right) + h\tau(t_i, h)\right|| \\
&\le \left|x(t_i) - x_i\right| + h\left|f\left(t_i, x(t_i)\right) - f(t_i, x_i)\right| + h\left|\tau(t_i, h)\right| \\
&\le \left|x(t_i) - x_i\right| + hL\left(\left|x(t_i) - x_i\right|\right) + h\left|\tau(t_i, h)\right| \\
&= (1 + hL)\left|x(t_i) - x_i\right| + h\left|\tau(t_i, h)\right|
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado la Desigualdad Triangular y en la segunda el hecho de que f es lipschitziana con constante de Lipschitz L. Por el primer apartado tenemos que $L \ge \frac{1}{2}$ puesto que la constante de Lipschitz es el supremo de la derivada parcial.

d) Como en el ejercicio anterior, utilizamos la misma estimación para el error solo que ahora $L = \frac{1}{2}$ y $T - t_0 = 1$. De esta forma, puesto que $h = \frac{1}{N}$

$$\epsilon(h) \le \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\frac{1}{N} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\frac{1}{N}$$

e imponiendo la condición de que

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\frac{1}{N} \le 10^{-4}$$

despejamos N para obtener que

$$N \ge \frac{10^4\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{2}$$

de forma que podemos tomar $N_0 = \frac{10^4\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)}{2}$

■

2.6. Ejercicio 2.6

Ejercicio 2.6. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \sin^2\left(x(t)\right), \ t \in [0, 1] \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

y la secuencia $\{x_i\}_{i=0}^N$ generada a partir del método de Euler implícito.

a) ¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Por qué?

b) Dar un rango de valores de h admisible para que el método de Euler implícito esté bien definido.

c) Si $\overline{\tau}(h)$ denota el erro local de truncamiento, demostrar que $\overline{\tau}(h) \le \frac{3h}{2}$.

d) Si $x(t)$ es la solución exacta del problema, probar que para el error de discretización global absoluto en el Método de Euler implícito se tiene una estimación del tipo

$$\epsilon(h) \le \psi(\tilde{h})||\epsilon_0(h)|| + \left(\psi(\tilde{h}) - 1\right)\overline{\tau}(h)$$

para todo $h = \frac{1}{N} \in \mathcal{H}$ con $h \le \tilde{h}$ suficientemente pequeño. Determinar una función $\psi(h)$ válida.

e) Si se toma $x_0 = 1$, encontrar un número natural N_0 de forma que

$$\max_{i=0,\ldots,N}\left|x(t_i) - x_i\right| \le 10^{-2}, \ N \ge N_0$$

Capítulo 3

Métodos Multipaso

3.1. Ejercicio 3.1

Ejercicio 3.1. Comprobar que el orden de los siguientes métodos multipaso es el indicado.

a) *Método de Adams-Bashforth de 2 pasos*

$$\begin{cases} x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{2}\left(3f_{i+1} - f_i\right) \\ \textit{Orden 2} \end{cases} \tag{3.1}$$

b) *Método de Adam-Bashforth de 3 pasos*

$$\begin{cases} x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{12}\left(23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i\right) \\ \textit{Orden 3} \end{cases} \tag{3.2}$$

c) *Método de Adams-Moulton de 2 pasos*

$$\begin{cases} x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{12}\left(5f_{i+2} - 8f_{i+1} - f_i\right) \\ \textit{Orden 2} \end{cases} \tag{3.3}$$

Solución.

a) El error local de truncamiento asociado el Método (3.1) viene dado por la expresión

$$\tau(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{2}\left(3f(t+h, x(t+h)) - f(t, x(t))\right)$$

Asumiendo que $f \in \mathcal{C}^2$, es decir que $x \in \mathcal{C}^3$, realizamos desarrollos de Taylor de orden 3

$$\begin{aligned} x(t+2h) &= x(t+h) + hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) + \frac{h^3}{6}x'''(\overline{\xi}) \\ x(t) &= x(t+h) - hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) - \frac{h^3}{6}x'''(\overline{\mu}) \end{aligned}$$

de forma que

$$f(t, x(t)) = x'(t) = x'(t+h) - hx''(t+h) + \frac{h^2}{2}x'''(\overline{\nu})$$

De esta forma llegamos a que

$$\begin{aligned}
\tau(t,h) &= \frac{x(t+2h)-x(t+h)}{h} - \frac{1}{2}\left(3f(t+h,x(t+h)) - f(t,x(t))\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(x(t+h) + hx'(t+h) + \frac{h^2}{2}x''(t+h) + \frac{h^3}{6}x'''(\bar{\xi}) - x(t+h)\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(3x'(t+h) - \left(x'(t+h) - hx''(t+h) + \frac{h^2}{2}x'''(\overline{\nu})\right)\right) \\
&= x'(t+h) + \frac{h}{2}x''(t+h) + \frac{h^2}{6}x'''(\bar{\xi}) - \frac{1}{2}\left(2x'(t+h) + hx''(t+h) - \frac{h^2}{2}x'''(\overline{\nu})\right) \\
&= \frac{h^2}{6}x'''(\bar{\xi}) + \frac{h^2}{4}x'''(\overline{\nu}) \\
&= \frac{h^2}{2}\left(\frac{x'''(\bar{\xi})}{2} + \frac{x''(\overline{\nu})}{2}\right) \\
&= O(h^2)
\end{aligned}$$

luego el Método (3.1) tiene efectivamente orden 2.

b) De la misma forma que en el apartado anterior, el error local de truncamiento para el Método (3.2) viene dado por la expresión

$$\tau(t,h) = \frac{x(t+3h)-x(t+2h)}{h} - \frac{1}{12}\left(23f(t+2h,x(t+2h)) - 16f(t+h,x(t+h)) - 5f(t,x(t))\right)$$

Asumiendo que $f \in \mathcal{C}^3$ podemos realizar desarrollos de Taylor de orden 3 de forma que

$$\begin{aligned}
x(t+3h) &= x(t+2h) + hx'(t+2h) + \frac{h^2}{2}x''(t+2h) + \frac{h^3}{6}x'''(t2+h) + \frac{h^4}{24}x''''(\bar{\xi}) \\
x(t+h) &= x(t+2h) - hx'(t+2h) + \frac{h^2}{2}x''(t+2h) + \frac{h^3}{6}x'''(t+2h) + x''''(\overline{\mu}) \\
x(t) &= (x+2h) + -2hx'(t+2h) + 4h^2x''(t+2h) - \frac{4h^3}{3}x'''(t+2h) + \frac{4h^4}{6}x''''(\overline{\nu})
\end{aligned}$$

Así tendremos que

$$\begin{aligned}
f(t+h,x(t+h)) &= x'(t+2h) - hx''(t+2h) + \frac{h^2}{2}x'''(t+2h) - \frac{h^3}{6}x''''(\bar{\zeta}) \\
f(t,x(t)) &= x'(t+2h) - 2hx''(t+2h) + 2h^2x'''(t+2h) - \frac{4h^3}{3}x''''(\bar{\theta})
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que, por un lado

$$\begin{aligned}
\frac{x(t+3h)-x(t+2h)}{h} &= \frac{1}{h}\Bigg(x(t+2h) + hx'(t+2h) + \frac{h^2}{2}x''(t+2h) + \\
&\qquad \frac{h^3}{6}x'''(t+2h) + \frac{h^4}{24}x''''(\bar{\xi}) - x(t+2h)\Bigg) \\
&= x'(t+2h) + \frac{h}{2}x''(t+2h) + \frac{h^2}{6}x'''(t+2h) + \frac{h^3}{24}x''''(\bar{\xi})
\end{aligned}$$

mientras que por otro

$$
\begin{aligned}
23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i = 23x'(t+2h) - &\\
&16\left(x'(t+2h) - hx''(t+2h) + \frac{h^2}{2}x'''(t+2h) - \frac{h^3}{6}x''''(\overline{\zeta})\right) + \\
&5\left(x'(t+2h) - 2hx''(t+2h) + 2h^2x'''(t+2h) - \frac{4h^3}{3}x''''(\overline{\theta})\right) \\
&= 12x'(t+2h) + 6hx''(t+2h) + 2h^2x'''(t+2h) + \frac{4h^3}{3}\left(2x''''(\overline{\zeta}) - 5x''''(\overline{\theta})\right)
\end{aligned}
$$

Así, finalmente, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
\tau(t,h) &= \frac{h^3}{24}x''''(\overline{\xi}) - \frac{4h^3}{9}x''''(\overline{\zeta}) + \frac{5h^3}{9}x''''(\overline{\theta}) \\
&= O(h^3)
\end{aligned}
$$

luego efectivamente, el Método (3.2) tiene orden 3.

■

3.2. Ejercicio 3.2

Ejercicio 3.2. Halla el orden de los siguientes métodos, sin usar desarrollos de Taylor, calcular su constante de error y estudiar su convergencia. Mostrar qué tienen que cumplir los r primeros pasos para que $\epsilon(h) = O(h^p)$ con p máximo, y dar un método que sirva para calcular esos r primeros pasos.

a) *Método del Punto Medio*: $x_{i+2} - x_i = 2hf(t_{i+1}, x_{i+1})$

b) *Método de Simpson*: $x_{i+2} - x_i = \frac{h}{3}(f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i)$

c) *Método de Adams-Moulton de 2 pasos*: $x_{i+2} - x_{i+1} = \frac{h}{12}(5f_{i+2} + 8f_{i+2} - f_i)$

d) *Método de Milne explícito de 4 pasos*: $x_{i+4} - x_i = \frac{4h}{3}(2f_{i+3} - f_{i+2} + 2f_{i+1})$

e) $x_{i+3} - x_i = \frac{3h}{8}(f_{i+3} + 3f_{i+2} + 3f_{i+1} + f_i)$

Solución. Vamos a usar el siguiente hecho

Teorema. *Un (ϱ, σ)-método tiene orden de precisión $p \in \mathbb{N}$ si y sólo si $c_0 = c_1 = 0 \cdots = c_p = 0$ y $c_{p+1} \neq 0$ donde*

$$
\begin{cases}
c_0 = \varrho(1) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \\
c_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) = \sum_{k=0}^{r} (k\alpha_k - \beta_k) \\
\vdots \\
c_j = \frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{r} (k\alpha_k - j\beta_k)\, k^{j-1}, \; j = 2, 3, \ldots
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

donde r es el número de pasos y α_k, β_k son los coeficientes de la expresión

$$
\sum_{k=0}^{r} \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^{r} \beta_k f_{i+k}
$$

a) En este primer caso, tenemos que $r = 2$ y de esta forma, los coeficientes α_k y β_k son

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

De esta forma calculamos los c_k como en (3.4) obteniendo

$$\begin{cases} c_0 = -1 + 0 + 1 = 0 \\ c_1 = -2 + 2 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$$

Así, como el primer $c_k \neq 0$ es c_3 concluimos el el orden de precisión del método es 2.

b) De nuevo, calculamos los α_k y los β_k. Obtenemos

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{3} \\ \beta_1 = \frac{4}{3} \\ \beta_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

y de nuevo siguiendo las expresiones en (3.4) obtenemos los valores de los c_k

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$$

y como el primer c_k distinto de 0 es c_3, concluimos que el orden de precisión del método es 2.

c) De la misma forma que antes, calculamos los α_k y β_k. Obtenemos

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = -\frac{1}{12} \\ \beta_1 = \frac{2}{3} \\ \beta_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

y mediante las ecuaciones (3.4) obtenemos los c_k

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = -1 \neq 0 \end{cases}$$

de forma que el orden de precisión del método es 3 pues el primer c_k distinto de cero es c_4.

d) Volvemos a repetir lo mismo que en los apartados anteriores. En este caso obtenemos

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = \frac{2}{3} \\ \beta_2 = -\frac{4}{3} \\ \beta_3 = \frac{8}{3} \\ \beta_4 = 0 \end{cases}$$

y nuevamente siguiendo las ecuaciones (3.4) obtenemos los c_k que son

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_5 \neq 0 \end{cases}$$

de forma que el orden de precisión del método es 4 pues el primer c_k distinto de cero es c_5.

e) Como antes, tenemos en este caso que

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = \frac{3}{8} \\ \beta_1 = \frac{9}{8} \\ \beta_2 = \frac{9}{8} \\ \beta_3 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

y obtenemos los c_k a partir de (3.4)

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_5 \neq 0 \end{cases}$$

luego el orden de precisión del método es 4.

■

3.3. Ejercicio 3.3

Ejercicio 3.3.

a) Demostrar que no hay ningún método lineal, de una paso y explícito.

b) Demostrar que no hay ningún método lineal, de un paso e implícito, de orden superior a 1.

Escribir en ambos casos un método de orden máximo.

Solución.

a) Supongamos que hay un método que cumple las condiciones del enunciado. Escribimos

$$\sum_{k=0}^{1} \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^{1} \beta_k f_{i+k}$$

es decir,

$$\alpha_0 x_i + \alpha_1 x_{i+1} = h \left(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i+1} \right)$$

Ahora, para que el método sea explícito necesitamos que $\beta_1 = 0$, de forma que el método queda

$$\alpha_0 x_i + \alpha_1 x_{i+1} = h\beta_0 f_i$$

Así, para que sea de orden superior a 1 tenemos que $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ para que sea de al menos orden 2. Utilizamos las ecuaciones (3.4) y obtenemos que

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ -\beta_0 + \alpha_1 = 0 \\ \frac{\alpha_1}{2} = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos que $\alpha_1 = 0$ y sustituyendo en la primera también se obtiene $\alpha_0 = 0$ de forma que no queda más remedio que $\beta_0 = 0$, contradicción. Para que halla uno de orden máximo, imponemos la condición de que $\alpha_1 \neq 0$. De esta forma,

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\alpha_1 \\ \beta_0 = \alpha_1 \end{cases}$$

de forma que queda el método

$$\boxed{x_{i+1} + x_i = hf_i}$$

que es el Método de Euler explícito.

b) Como antes imponemos las condiciones para que sea implícito ($\beta_1 \neq 0$) y de orden superior a 2, es decir, que $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ para que al menos sea de orden 2. De esta forma obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ -\beta_0 + \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \end{cases}$$

Directamente restando las dos últimas ecuaciones obtenemos que $\beta_1 = 0$ lo que contradice la hipótesis de que el método sea implícito. Para obtener un método de orden máximo, eliminamos la cuarta ecuación. de la tercera obtenemos que $\alpha_1 = 2\beta_1$ y sustituyendo en la primera, que $\alpha_0 = -2\beta_1$. Sustituyendo de nuevo en la segunda obtenemos que $\beta_0 = \beta_1$, de forma que el método queda

$$2\beta_1 x_{i+1} - 2\beta_1 x_i = h\beta_1 \left(f_{i+1} + f_i\right)$$

y dividiendo por $2\beta_1$ se obtiene

$$\boxed{x_{i+1} - x_i = \frac{h}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right)}$$

que es el Método del Trapecio.

■

3.4. Ejercicio 3.4

Ejercicio 3.4. Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se considera el método

$$x_{i+3} - x_i + \lambda\left(x_{i+2} - x_{i+1}\right) = \mu h\left(f_{i+2} + f_{i+1}\right)$$

a) Determinar λ y μ para que el método sea de orden 4.

b) Hallar la constante de error.

c) ¿Es este método 0-estable?

Solución.

a) Para que el Método sea de orden 4, queremos que

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

y que $c_5 \neq 0$ donde los c_k se calculan como en (3.4). Calculamos los α_k y los b_k. Obtenemos que

$$\begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \alpha_1 = -\lambda \\ \alpha_2 = \lambda \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = \mu \\ \beta_2 = \mu \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

De esta forma (omitimos los factoriales pues nos interesa sacar las soluciones para λ y μ

$$\begin{aligned} c_0 &= -1 - \lambda + \lambda + 1 = 0 \\ c_1 &= -\beta_0 + \alpha_1 - \beta_1 + 2\alpha_2 - \beta_2 + 3\alpha_3 - \beta_3 \\ &= -0 - \lambda - \mu + 2\lambda + 3 - 0 \\ &= \boxed{\lambda - 2\mu + 3} \\ c_2 &= \alpha_1 - 2\beta_1 + (2\alpha_1 - 2\beta_2)\,2 + (3\alpha_3 - 2\beta_3)\,3 \\ &= -\lambda - 2\mu + 4\lambda - 4\mu + 9 \\ &= 3\lambda - 6\mu + 9 \\ c_3 &= \alpha_1 - 3\beta_1 + (2\alpha_2 - 3\beta_2)\,4 + (3\alpha_3 - 3\beta_3)\,9 \\ &= -\lambda - 3\mu + 8\lambda - 12\mu + 27 \\ &= \boxed{7\lambda - 15\mu + 27} \end{aligned}$$

Como la segunda ecuación y la tercera son proporcionales, utilizamos las ecuaciones obtenidas al calcular c_1 y c_3 para proponer un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ y μ). Al resolverlo obtenemos que

$$\boxed{\lambda = 9} \quad \boxed{\mu = 6}$$

y seguimos calculando los c_k siguientes

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{4!}(\alpha_1 - 4\beta_1 + (2\alpha_2 - 4\beta_2)8 + (3\alpha_3 - 4\beta_3)27) \\ &= \frac{1}{4!}(-9 - 24 + (18 - 24)8 + 3 \cdot 26) \\ &= -33 - 48 + 81 = 0 \\ c_5 &= \frac{1}{5!}(\alpha_1 - 5\beta_1 + (2\alpha_2 - 5\beta_2)16 + (3\alpha_3 - 5\beta_3)81) \\ &= \frac{1}{5!}(-9 - 30 + (18 - 30)16 + 81 \cdot 3) \\ &= \frac{12}{5!} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

y por tanto, el método tiene orden 4.

b) La constante de error viene dada por

$$c_{\text{error}} = \frac{c_{p+1}}{\sigma(1)}$$

donde c_{p+1} es el primer c_k distinto de 0 y

$$\sigma(z) = \sum_{k=0}^{r} \beta_k z^k$$

Así, $\sigma(1) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 12$ y por tanto

$$c_{\text{error}} = \frac{1/10}{12} = \frac{1}{120}$$

c) Para ver si el método es 0-estable, tenemos que imponer la condición de Dahlquist sobre $\varrho(z) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k z^k$, pues un método es 0-estable si y sólo si el polinomio $\varrho(z)$ verifica la condición de Dahlquhist.

Condición de Dahlquist: El polinomio $\varrho(z) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k z^k$ verifica la *condición de Dahlquist* si sus raíces $\{z_1, \ldots, z_3\} \subset \mathbb{C}$ verifican

a) $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ (las r raíces de $\varrho(z)$ se encuentran en el disco unidad).

b) Si $|z_i| = 1$ entonces z_i es una raíz simple de $\varrho(z)$ (las raíces de $\varrho(z)$ que están sobre la circunferencia unidad tienen multiplicidad 1).

Ahora, el polinomio $\varrho(z)$ es

$$\varrho(z) = -1 - 9z + 9z^2 + z^3$$

Utilizando Fubini y resolviendo la ecuación de segundo grado restante obtenemos que las raíces de $\varrho(z)$ son $z = 1, z = -5 \pm 2\sqrt{6}$, luego no cumple la condición de Dahlquist y por tanto el método no es 0-estable.

■

3.5. Ejercicio 3.5

Ejercicio 3.5. Encontrar, si es posible, un (ϱ, σ)-método lineal 0-estable de dos pasos y orden

a) 3 y explícito.

b) 4.

c) 4 y explícito.

d) 5.

Solución.

a) Para que sea de orden 3 necesitamos que $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 \neq 0$ donde los c_k son como en (3.4) y además para que sea explícito ha de ser $b_2 = 0$. De esta forma tendremos que las ecuaciones obtenidas a partir de (3.4) forman un sistema de ecuaciones de 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Puesto que el método tiene que ser de 2 pasos, hacemos $\alpha_2 = 1$ pues el sistema sería compatible determinado y dependiente de un parámetro. Así, las ecuaciones serán entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 &= -1 \\
\alpha_2 - \beta_0 - \beta_1 &= -2 \\
\alpha_1 - 2\beta_1 - 4\beta_2 &= -4 \\
\alpha_1 - 3\beta_1 - 12\beta_2 &= -8
\end{aligned}$$

Este es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que tiene solución única

$$\boxed{\alpha_0 = -5, \alpha_1 = 4, \beta_0 = 2, \beta_1 = 4}$$

Estudiamos ahora si el (ϱ, σ)-método es 0-estable. Para ello vemos si el polinomio $\varrho = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2$ verifica la *condición de Dahlquist*. Tenemos que

$$\varrho(z) = z^2 + 4z - 5 = (z-1)(z+5)$$

Puesto que una de las raíces es $z_1 = -5$, tenemos que $|z_1| > 1$ y por tanto no se verifica la *condición de Dahlquist* por lo que concluimos que el método obtenido no es 0-estable.

b) Para que el método tenga orden 4 tienen que cumplirse simultáneamente las ecuaciones $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0, c_5 \neq 0$ donde los c_k se calculan como antes. Ahora no podemos suponer que $\beta_2 = 0$ porque no nos dicen si el método es implícito o explícito. Haciendo de nuevo $\alpha_2 = 1$ obtenemos ahora las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 &= -1 \\
\alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 &= -2 \\
\alpha_1 - 2\beta_1 - 4\beta_2 &= -4 \\
\alpha_1 - 3\beta_1 - 12\beta_2 &= -8 \\
\alpha_1 - 4\beta_1 - 32\beta_2 &= -16
\end{aligned}$$

Este es un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas que tiene solución única

$$\boxed{\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = \frac{1}{3}, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3}}$$

Verificamos ahora que efectivamente tiene orden 4, es decir, que $c_5 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{1}{5!}\left(\alpha_1 - 5\beta_1 + (2\alpha_2 - 5\beta_2)15\right) \\
&= \frac{1}{5!}\left(0 - 5\frac{4}{3} + \left(2 - 5\frac{1}{3}\right)16\right) \\
&= \frac{1}{5!}\left(-\frac{20}{3} + \frac{16}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{90}
\end{aligned}$$

luego efectivamente el método tiene orden 4. Veamos por último si es 0-estable comprobando si verifica la *condición de Dahlquist*. En este caso el polinomio $\varrho(z)$ es

$$\varrho(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

cuyas dos raíces son 1 y -1, ambas con multiplicidad 1. De esta forma el método es 0-estable.

c) Es claro que no puede haber un (ϱ,σ)-Método de dos pasos y de orden 4 y explícito, pues si así lo hubiese tendríamos que $\beta_2 = 0$ para cumplir la condición de ser explícito. Pero en el apartado anterior hemos visto que para que un (ϱ,σ)-Método tenga orden 4 necesariamente ha de ser $\beta_2 = \frac{1}{3}$, contradicción.

d) Tampoco puede hacer un (ϱ,σ)-método de 2 pasos de orden 5 pues como hemos visto en el segundo apartado, $c_5 \neq 0$.

■

3.6. Ejercicio 3.6

Ejercicio 3.6. Se considera un (ϱ,σ)-Método multipaso lineal con $\sigma(z) = z^2$. Encontrar un polinomio cuadrático $\varrho(z)$ para que el (ϱ,σ)-Método anterior tenga orden máximo. ¿Cuál es este orden máximo? ¿Es convergente el método obtenido?

Solución. La información que nos dan en el enunciado es que

$$\sigma(z) = \sum_{k=0}^{r} \beta_k z^k = z^2$$

de forma que el (ϱ,σ)-Método buscado es de 2 pasos y que $\beta_0 = \beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$. Consideramos por tanto el método multipaso lineal

$$\alpha_2 x_{i+2} + \alpha_1 x_{i+1} + \alpha_0 x_i = h f_{i+2}$$

e imponemos las condiciones en los c_k definidas en (3.4) para que el método tenga orden máximo. Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 1 &= 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas con solución única

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{-1}{2}, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = \frac{3}{3}}$$

y por tanto, el (ϱ,σ)-método buscado es

$$\boxed{\frac{3}{2} x_{i+2} - 2x_{i+1} - \frac{1}{2} x_i = h f_{i+2}}$$

Para ver cuál es el orden máximo seguimos calculando los $c_k, k > 2$ hasta encontrar el primero distinto de 0.

$$c_5 = \frac{1}{3!}\left(-2 + (3-3)4\right) = -\frac{1}{3} \neq 0$$

y por tanto el orden máximo es 2. Para estudiar la convergencia utilizamos la siguiente información

Teorema. *Un (ϱ,σ)-Método es convergente si y sólo si es consistente y 0-estable.*

Como el método obtenido es consistente al ser $c_0 = c_1 = 0$ tenemos que verificar la *condición de Dahlquist* para comprobar la 0-estabilidad y así ver si es o no es convergente. El polinomio $\varrho(z)$ es en este caso

$$\varrho(z) = \frac{3}{2} z^2 - 2z - \frac{1}{2}$$

que tiene como raíces $z_1 = 1$ y $z_2 = \frac{1}{3}$, ambas con módulos menores o iguales que 1, de forma que el (ϱ,σ)-método obtenido es 0-estable y por la discusión anterior es convergente. ■

Capítulo 4

Métodos de predicción-corrección

4.1. Ejercicio 4.1

Ejercicio 4.1. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) &= \xi_0 \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}([t_0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Dado $N \in \mathbb{N}$ se considera la red de puntos de paso $h = \frac{T-t_0}{N}$ formada por los nodos $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, N$.

Para resolver numéricamente el problema se considera el Método de Adams-Moulton de 2 pasos

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{12}\left(5f(t_{i+2}, x_{i+2}) + 8f(t_{i+1}, x_{i+1}) - f(t_i, x_i)\right)$$

para $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

a) Demostrar que este método es 0-estable y de orden 3.

b) En lugar del método implícito anterior se considera el método de predicción-correción $P(EC)E$ en el que se toma como predictor el Método de Euler modificado y como corrector el Método de Adams-Moulton anterior. Demostrar que el método anterior tiene orden 3.

Solución.

a) Para este primer apartado, calculamos los coeficientes c_k definidos en (3.4) y vemos cuales se anulan. Después veremos si el método verifica la *condición de Dahlquist* para ver si efectivamente es 0-estable. Tenemos que

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 = -\frac{1}{12} \\ \beta_1 = \frac{8}{12} \\ \beta_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

de forma que

$$\begin{cases} c_0 &= 0 - 1 + 1 = 0 \\ c_1 &= \frac{1}{12} - \frac{8}{12} + \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = 0 \\ c_2 &= \frac{-12}{12} - \frac{16}{12} + \frac{48}{12} - \frac{20}{12} = 0 \\ c_3 &= -\frac{12}{12} - \frac{24}{12} + \frac{96}{12} - \frac{60}{12} = 0 \\ c_4 &= \frac{50}{3} \neq 0 \end{cases}$$

luego efectivamente el método es de orden 3 pues el primer c_k distinto de cero es c_4. Veamos ahora que es 0-estable. El polinomio $\varrho(z)$ en nuestro caso es

$$\varrho(z) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k z^k = z^2 - 1$$

que tiene por raíces $z_1 = 1, z_2 = -1$ ambas de módulo igual a uno y simples. Así, el polinomio $\varrho(z)$ satisface la *condición de Dahlquist* y el método es en conseuencia 0-estable.

b) El Método de Euler mejorado viene dado por la expresión

$$x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right)$$

que no es un (ϱ, σ)-método, de forma que no podemos aplicar el Teorema de los apuntes. Sin embargo, podemos adaptar la demostración para este caso. Denotamos por $\tau^*(t,h)$ al error local de truncamiento del Método de Euler mejorado y por $\tau(t,h)$ al del Método de Adams-Moulton de 2 pasos. Como el número de pasos no coinciden, hacemos un falso Método de Euler mejorado con dos pasos,

$$\begin{aligned} x_{i+2} &= x_{i+1} + hf\left(t_{i+1} + \frac{h}{2}, x_{i+1} + \frac{h}{2} f(t_{i+1}, x_{i+1})\right) \\ &= x_{i+1} + hf\left(t + ih + \frac{h}{2}, x_{i+1} + \frac{h}{2} f(t_{i+1}, x_{i+1}\right) \end{aligned}$$

de forma que el $\tau^*(t,h)$ viene dado por

$$\tau^*(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - f\left(t + \frac{3h}{2}, x(t,h) + \frac{h}{2} f(t+h, x(t+h))\right) \tag{4.1}$$

Por otro lado, $\tau(t,h)$ viene dado por

$$\tau(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{12}\left(5f(t+2h, x(t+2h)) + 8f(t+h, x(t+h)) - f(t, x(t))\right)$$

y el error local de truncamiento del método de corrección-predicción resultante, $\tau^{P(EC)E}(t,h)$ viene dado por

$$\tau^{P(EC)E}(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{12}\left(5f(t+2h, x^*(t+2h)) + 8f(t+h, x(t+h)) - f(t, x(t))\right)$$

donde $x^*(t+2h)$ es el valor predicho por el *predictor*, el Método de Euler modificado. Sumando y restando la cantidad

$$\frac{5}{12} f(t+2h, x(t+2h))$$

a la ecuación anterior, obtenemos reorganizando los términos que

$$\begin{aligned} \tau^{P(EC)E}(t,h) &= \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{12}\left(5f(t+2h, x^*(t+2h)) + 8f(t+h, x(t+h)) - f(t, x(t))\right) \\ &\quad + \frac{5}{12}\left(f(t+2h, x(t+2h)) - f(t+2h, x(t+2h))\right) \\ &= \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{12}\left(5f(t+2h, x(t+2h)) + 8f(t+h, x(t+h)) - f(t, x(t))\right) \\ &\quad + \frac{5}{12}\left(f(t+2h, x(t+2h)) - f(t+2h, x^*(t+2h))\right) \\ &= \tau(t,h) + \frac{5}{12}\left(f(t+2h, x(t+2h)) - f(t+2h, x^*(t+2h))\right) \end{aligned}$$

Ahora, tomando módulos y haciendo uso de que f es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz L, tenemos que

$$\left|\left|\tau^{P(EC)E}\right|\right| \leq \left|\left|\tau(t,h)\right|\right| + \frac{5}{12}\left|\left|x(t+2h) - x^*(t+2h)\right|\right| \tag{4.2}$$

Ahora, en la ecuación (4.1) despejamos $x(t+2h)$, que es en realidad el valor predicho $x^*(t+2h)$, de forma que

$$x^*(t+2h) = x(t+h) + hf\left(t + \frac{3h}{2}, (t+h) + \frac{h}{2}f(t+h, x(t+h))\right)$$

e introduciéndolo en (4.2), queda

$$\left|\left|x(t+2h) - x^*(t+2h)\right|\right| = \left|\left|x(t+2h) - x(t+h) - hf\left(t + \frac{3h}{2}, (t+h) + \frac{h}{2}f(t+h, x(t+h))\right)\right|\right|$$

y dividiendo a ambos lados de la ecuación por el paso h obtenemos finalmente que

$$\left|\left|x(t+2h) - x^*(t+2h)\right|\right| = h\left|\left|\tau^*(t,h)\right|\right|$$

Por último, puesto que por el primer apartado $\overline{\tau}(t,h) = 0(h^3)$ y es un hecho conocido que el Método de Euler modificado es de orden 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}^{P(EC)E} = \left|\left|\tau^{P(EC)E}\right|\right| &\leq \left|\left|\tau(t,h)\right|\right| + \frac{5Lh}{12}\left|\left|\tau^*(t,h)\right|\right| \\
&= \overline{\tau}(t,h) + \frac{5Lh}{12}\overline{\tau}^*(t,h) \\
&= O(h^3) + O(h^3) = O(h^{\text{mín}\{3,3\}}) \\
&= O(h^3)
\end{aligned}$$

de forma que el método de predicción-corrección resultante es de orden 3.

■

Capítulo 5

Estabilidad absoluta y problemas rígidos

5.1. Ejercicio 5.1

Ejercicio 5.1. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t),\ t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases}$$

a) Comprobar que la solución exacta $x(t)$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, independientmente del dato inicial ξ_0.

b) Dado $h > 0$ se consideran los nodos $t_i = ih$ con $i = 0, 1, 2, \ldots$ Comprobar que, usando los métodos de *Euler*, *Euler implícito*, *θ-método*, *Taylor* de orden 2, *Euler mejorado*, *Euler modificado* y de *Runge-Kutta* de orden 4 (clásico), la solución numérica verifica que

$$x_{i+1} = R(\tilde{h})x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\tilde{h} = \lambda h$ y la *función de estabilidad* o *amplificación*) $R(z)$ depende del método y viene dada por

Método de Euler (explícito) :	$R(z) = 1 + z$
Método de Euler implícito :	$R(z) = \dfrac{1}{1-z}$
θ-Método :	$R(z) = \dfrac{1+(1-\theta)z}{1-\theta z}$
Métodos de Taylor de orden 2- Euler mejorado y modificado :	$R(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!}$
Método de Runge-Kutta de orden 4 :	$R(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!}$

c) Concluir que $x_i = \left(R(\tilde{h})\right)^i x_0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots,$ por lo que, para que la solución numérica tienda a cero independientemente del valor inicial, el paso h ha de ser elegido de forma que $|R(\tilde{h})| < 1$.

d) Demostrar que en Método de Euler explícito, a medida que $\mathrm{Re}(\lambda) \to -\infty$ la restricción sobre el paso h es cada vez mayor. ¿Se dan estas restricciones en el método de Euler implícito?

Solución.

a) La solución exacta del problema de valor inicial es

$$x(t) = \xi_0 e^{\lambda t} = \xi_0 e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} e^{i\mathrm{Im}(\lambda)t}$$

luego, como $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, al hacer tender t hacia infinito se tendrá que $e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \to 0$ de forma que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

b) Vamos haciéndolo método por método.

- *Euler explícito*: El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

De esta forma, puesto que $R(z) = 1 + z$ tenemos que $R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = 1 + \lambda h$. Por otro lado, en nuestro caso

$$f(t, x(t)) = \lambda x(t)$$

de forma que

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) = x_i + h\lambda x_i = (1 + \lambda h)x_i = R(\tilde{h})x_i$$

- *Euler implícito:* El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1})$$

De esta forma, puesto que $R(h) = \frac{1}{1-z}$ tendremos que

$$R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = \frac{1}{1 - \lambda h}$$

Por otro lado

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) = x_i + h\lambda x_{i+1}$$

y despejando x_{i+1} en la ecuación anterior obtenemos que

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{1 - \lambda h} = R(\tilde{h})x_i$$

- *θ-Método:* El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + h\left((1 - \theta)f(t_i, x_i) + \theta f(t_{i+1}, x_{i+1})\right)$$

Por otro lado, el valor de $R(\tilde{h})$ en este caso es

$$R(\tilde{h}) = \frac{1 + (1 - \theta)\lambda h}{1 - \theta\lambda h}$$

Sustituyendo el valor de nuestra función $f(t, x(t))$ en el método obtenemos que

$$x_{i+1} = x_i + h(1 - \theta)\lambda x_i + \lambda h\theta x_{i+1}$$

de forma que despejando x_{i+1} queda

$$x_{i+1} = \frac{1 + (1 - \theta)\lambda h}{1 - \theta\lambda h} x_i = R(\tilde{h})x_i$$

- *Taylor de orden* 2: El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_{+}hT_2(t_i, x_i, h)$$

donde

$$T_2(t_i, x_i, h) = f^{(0)}(t, x_i) + \frac{h}{2} f^{(1)}(t, x_i)$$

siendo

$$f^{(1)}(t, \xi) = f_t + f_\xi f$$

y en general

$$f^{(k)}(t, \xi) = \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial t}(t, \xi) + D_\xi f^{(k-1)}(t, \xi) f(t, \xi)$$

Que en nuestro caso es

$$T_2(t_i, x_i, h) = \lambda x_i + \frac{h}{2}\lambda^2 x_i = x_i \left(\lambda + \frac{\lambda^2 h}{2}\right)$$

de forma que el método entonces es

$$x_{i+1} = x_i + hx_i \left(\lambda + \frac{\lambda^2 h}{2}\right) = x_i \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right)$$

y como

$$R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}$$

se cumple la propiedad.

- *Euler mejorado:* El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, x_i) + f\big(t_{i+1}, x_i + hf(t_i, x_i)\big)\Big)$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2}\left(\lambda x_i + f(x_i + \lambda x_i)\right) \\ &= x_i + \frac{h}{2}\left(\lambda x_i + \lambda(x_i + \lambda h x_i)\right) \\ &= x_i + \frac{h}{2}\left(\lambda x_i + \lambda x_i + \lambda^2 h x_i\right) \\ &= x_i + \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Y como el valor de $R(\tilde{h})$ es

$$R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}$$

se cumple la propiedad.

- Euler modificado: El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right)$$

En nuestro caso

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}\lambda x_i\right) \\
&= x_i + h\lambda\left(x_i + \frac{h}{2}\lambda x_i\right) \\
&= x_i + h\lambda x_i + \frac{h^2\lambda^2}{2}x_i \\
&= x_i\left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

y como

$$R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}$$

se verifica la propiedad.

- *Runge-Kutta orden* 4: El método viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right)$$

donde

$$
\begin{aligned}
&F_1 = f(t_i, x_i) = \lambda x_i \\
&F_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}F_1\right) = x_i\left(\lambda + `\frac{h\lambda^2}{2}\right) \\
&F_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}F_2\right) = x_i\left(\lambda + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda^3 h^2}{2}\right) \\
&F_4 = f\left(t_i + h, x_i + hF_3\right) = x_i\left(\lambda + `\lambda^2 h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^3}{4}\right)
\end{aligned}
$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
x_i + \frac{h}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right) &= x_i + x_i\left(\lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4}{h^4}24\right) \\
&= x_i\left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24}\right)
\end{aligned}
$$

por otro lado

$$R(\tilde{h}) = R(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24}$$

de forma que se verifica la propiedad.

c) Lo probamos por inducción sobre i. El caso base es $i = 0$, en cuyo caso tendríamos que

$$x_0 = (R(\tilde{h}))^0 x_0 = x_0$$

y se cumple trivialmente. Supongamos cierto para $i = k$. Entonces

$$x_{k+1} = R(\tilde{h})x_k = R(\tilde{h})\left(R(\tilde{h})\right)^k x_o = \left(R(\tilde{h})\right)^{k+1} x_0$$

y se tiene el resultado. De esta forma para que la solución numérica tienda a cero es necesario que $\left|R(\tilde{h})\right|$ sea menor que 1, luego hay que escoger el paso h de forma que verifique esa propiedad.

d) Sabemos que la región de estabilidad del Método de Euler explícito es

$$\left|R(\tilde{h})\right| = \left|1+\tilde{h}\right| < 1$$

Escribiendo esta expresión en función de λh queda

$$\left|1+\lambda h\right| < 1$$

pero $|\lambda h - (-1)| < 1$ si y sólo si

$$\left|\lambda - \left(-\frac{1}{h}\right)\right| < \frac{1}{h}$$

lo que ocurre si y sólo si

$$\lambda \in B_{\frac{1}{h}}\left(-\frac{1}{h}, 0\right)$$

Así, cuanto más pequeño es el paso h, el radio $\frac{1}{h}$ es mayor. Por tanto, tenemos que hacer h lo suficientemente pequeño como para que λ este en la bola. De esta forma, si $\mathrm{Re}(\lambda) \to -\infty$ entonces $h \to 0$.

■

5.2. Ejercicio 5.2

Ejercicio 5.2. Demostrar que los Métodos de Euler implícito y del Trapecio son A-estables.

Solución. Decimos que un método es A-*estable* si su región de estabilidad contiene a $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

- *Euler implícito.* La región de estabilidad asociada a este método es

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1-\tilde{h}}\right| < 1 &\Leftrightarrow \left|\tilde{h}-1\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{h} \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0,1)\end{aligned}$$

  de esta forma, puesto que $\mathbb{C}^- \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0,1)$ concluimos que el Método de Euler implícito es A-estable.

- *Trapecio.* El Método del Trapecio es un θ-método con $\theta = \frac{1}{2}$. Así, su región de estabilidad viene dada por

$$\begin{aligned}\left|\frac{1+\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}\right| < 1 &\Leftrightarrow \left|1+\frac{1}{2}z\right| < \left|1-\frac{1}{2}z\right| \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) < 0\end{aligned}$$

  y por tanto, el Método del Trapecio es A-estable.

■

5.3. Ejercicio 5.3

Ejercicio 5.3. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \ t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_n$ y la red de puntos $t_i = ih$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ con $h > 0$.

a) Resolver numéricante el problema de valor inicial anterior utilizando los métodos del Ejericio 1. Comprobar que

$$x_i = (R(hA))^i \, x_0, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $R(hA)$ es una cierta matriz que depende de A.

b) Si la matriz A es diagonalizable y, por tanto, existen una matriz no singular P y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$, comprobar que $(R(hA))^i = P\,(R(hD))^i\,P^{-1}$. Determinar la matriz $R(hD)$.

c) Demostrar que existen vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\{\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \ldots, \tilde{v_n}\} \subset \mathbb{R}^\ltimes$ tales que

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t_i} v_j \text{ y } x_i = \sum_{j=1}^{n} (R(\lambda_j h)^i \, \tilde{v}_j$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$ donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}^n$ son los autovalores (posiblemente repetidos de la matriz A. Además, si $x_0 = \xi_0$ se verifica que $\tilde{v}_j = v_j$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

d) Suponiendo que $\lambda_j < 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, determinar condiciones suficientes para que la solución aproximada mediante el Método de Euler (explícito) se comporte como la solución exacta cuanco $i \to +\infty$. Justificar que si el sistema es *rígido*, es decir, existen autovalores de A que difieren en muchos órdenes de magnitud, es posible que con valores no muy pequeños de h la solución numérica no refleje el comportamiento cualitativo de la solución exacta.

Solución.

a) No tenemos más que cambiar 1 en las funciones de amplificación del Ejercicio 1 por la matriz identidad I. De esta forma, por ejemplo, para el Método de Euler explícito tenemos

$$R(hA) = I + hA$$

de forma que

$$x_{i+1} = x_i = f(t_i, x_i) = x_i + hAx_i = x_i(I + hA) = R(hA)x_i$$

Para el método de Euler implícito, sea

$$R(hA) = (I - hA)^{-1}$$

de forma que

$$x_{i+1} = x_i + hAx_{i+1}$$

y así,

$$x_{i+1} = x_i(I - hA)^{-1} = R(hA)x_i$$

y de igual forma se hace con el resto de métodos. Dejamos indicadas aquí las matrices $R(hA)$ para los demás.

- *Taylor de orden 2, Euler mejorado* y *Euler modificado*:

$$R(hA) = I + hA + \frac{h^2}{2}A^2$$

- *Runge-Kutta de orden 4*:

$$R(hA) = I + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \frac{h^3}{3!}A^3 + \frac{h^4}{4!}A^4$$

Para ver que en efecto se tiene que $x_i = (r(hA))^i x_0$ utilizamos inducción. El caso base lo tenemos garantizado en todos los pasos. Así, tenemos que suponiendo el resultado cierto para k

$$x_{k+1} = R(hA)x_k = R(hA)\left(R(hA)\right)^k x_0 = \left(R(hA)\right)^{k+1} x_0$$

y se tiene el resultado.

b) De nuevo lo probamos por inducción. El caso base para $i = 0$ es

$$\left(R(hA)\right)^0 = I = P\left(R(hD)\right)^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

de forma que suponiendo el resultado cierto para k tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(R(hA)\right)^{k+1} &= R(hA)\left(R(hA)\right)^k = R(hA)\left(P\left(R(hD)\right)^k P^{-1}\right) \\
&= \left(P\left(R(hD)\right)P^{-1}\right)\left(P\left(R(hD)\right)^k P^{-1}\right) \\
&= PR(hD)\left(R(hD)\right)^k P^{-1} \\
&= P\left(R(hD)\right)^{k+1} P^{-1}
\end{aligned}$$

Ahora queremos determinar la matriz $R(hD)$. Esto lo haríamos para cada método. La matriz D es

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, 1 \leq i \leq n$ son los autovalores de la matriz A. En el Método de Euler explícito, por ejemplo, tendremos que

$$R(hD) = I + hD = \begin{pmatrix} 1 + h\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + h\lambda_n \end{pmatrix}$$

que coincidecon la matriz diagonal cuyas coeficientes son $R(h\lambda_i), 1 \leq i \leq n$. Por poner otro ejemplo, para el Método de Euler implícito, en este caso tendríamos que

$$R(hD) = (I - hD)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - h\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 - h\lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-h\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-h\lambda_n} \end{pmatrix}$$

que de nuevo vuelve a coincidir con la matriz diagonal cuyas coeficientes son $R(h\lambda_i), 1 \leq i \leq n$. De esta forma tendremos que en general que

$$R(hD) = \begin{pmatrix} R(h\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(h\lambda_n) \end{pmatrix}$$

■

5.4. Ejercicio 5.4

Ejercicio 5.4. Demostrar que la *región de estabilidad*:

a) Del *Método del Punto medio* es vacía

b) De un método lineal explícito (ya sea monopaso o multipaso) es acotada.

Solución. Vamos a utilizar un resultado diferente que aparece en los apuntes. Hemos visto que conociendo el problema de valor inicial podemos calcular la *función de estabilidad* que dependerá del método que queramos usar y que la región de estabilidad absoluta viene dada por

$$\left|R(\tilde{h})\right| < 1$$

Esta función no sólo depende del método sino también de la función $f(t, x(t))$. Para ello necesitamos calcular la región de estabilidad absoluta de otra forma. Definimos el *polinomio de estabilidad* para un (ϱ, σ)-método lineal de r pasos como

$$\pi(z, \tilde{h}) = \sum_{k=0}^{r} \left(\alpha_k - \tilde{h}\beta_k\right) z^k = \varrho(z) - \tilde{h}\sigma(z)$$

y de esta forma, diremos que la *región de estabilidad absoluta* del (ϱ, σ)-método correspondiente es

$$\mathcal{R} = \{\tilde{h} \in \mathbb{C} \mid \left|s_j(\tilde{h})\right| < 1,\ j = 1, 2, \ldots, r\}$$

donde $s_i(\tilde{h})$ son las raíces del polinomio $\pi(z, \tilde{h})$.

a) El *Método del Punto medio* viene dado por

$$x_{i+2} = x_i + 2hf\left(t_{i+1}, x_{i+1}\right))$$

de forma que

$$\begin{aligned} \varrho(z) &= z^2 - 1 \\ \sigma(z) &= 2z \end{aligned}$$

y por tanto el polinomio $\pi(z, \tilde{h})$ es

$$\pi(z, \tilde{h}) = z^2 - 2\tilde{h}z - 1$$

que tiene como raíces

$$\begin{aligned} s_1(\tilde{h}) &= \tilde{h} + \sqrt{\tilde{h}^2 + 1} \\ s_2(\tilde{h}) &= \tilde{h} - \sqrt{\tilde{h}^2 + 1} \end{aligned}$$

ahora bien

$$\left|s_2(\tilde{h})\right| = \left|\tilde{h} - \sqrt{\tilde{h}^2 + 1}\right| = \left|\frac{\left(\tilde{h}^2 - \sqrt{\tilde{h} + 1}\right)\left(\tilde{h} + \sqrt{\tilde{h}^2 + 1}\right)}{\tilde{h}^2 + \sqrt{\tilde{h} + 1}}\right| = \frac{1}{\left|s_1(\tilde{h})\right|}$$

de forma que $\left|x_1(\tilde{h})\right|\left|s_2(\tilde{h})\right| = 1$ y por tanto es imposible que ambas sean menores que 1, luego la región de estabilidad es vacía.

b) Un método multipaso explícito es de la forma

$$\sum_{k=0}^{r} \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k z^k$$

de forma que el polinomio característico viene determinado por

$$\pi(z, \tilde{h}) = \varrho(z) - \tilde{h}\sigma(z)$$

Ahora, ¿qué significa que la región de estabilidad *esté acotada*? Quiere decir que podemos encontrar una bola abierta B_ε de forma que $\mathcal{R} \subset B_\varepsilon$. En otras palabras, que *existe un* ε *de forma que para todo* $\tilde{h} \in \mathcal{R}$ *se tiene que* $|\tilde{h}| < \varepsilon$.

De esta forma vamos a suponer que la región de estabilidad $\mathcal{R}$ no esté acotada y que por tanto los valores $\tilde{h} \in \mathcal{R}$ tiene módulo arbitrariamente grande. Así, se trata de probar que, al coger una raíz de $\pi(z, \tilde{h})$, denotémosla por $s(\tilde{h})$, y hacer

$$\lim_{|\tilde{h}| \to \infty} s(\tilde{h})$$

lleguemos a una contradicción.

Sea por tanto $s(\tilde{h})$ una raíz de $\pi(z, \tilde{h})$. Tendremos por tanto que $s(\tilde{h})$ es a su vez raíz del polinomio

$$\Pi(z, \tilde{h}) = \frac{\varrho}{\tilde{h}} - \sigma(z)$$

Así, haciendo $|\tilde{h}| \to +\infty$, tenemos que

$$\Pi(z, \tilde{h}) \approx -\sigma(z)$$

y por lo tanto las raíces de $\Pi(z, \tilde{h})$ (de igual forma, las raíces de $\pi(z, \tilde{h})$) tenderán a las raíces de $\sigma(z)$. Puesto que el método es explícito, $\sigma(z)$ tiene $r - 1$ raíces contadas con su multiplicidad mientras que los polinomios $\pi(z, \tilde{h})$ y $\Pi(z, \tilde{h})$ tienen r. Tomemos pues la raíz de $\Pi(z, \tilde{h})$ que no es raíz de $\sigma(z)$. Si hacemos tender $|\tilde{h}| \to +\infty$ tendremos dos casos: en el primero, este valor es finito, y por lo discutido anteriormente dicha raíz será una de las $r - 1$ raíces de $\sigma(z)$. Así, $\sigma(z)$ tendría r raíces, lo que contradice el hecho de que el método sea explícito; en el segundo caso, la raíz tiende a infinito de forma que el método no es absolutamente estable para valores de $\tilde{h}$ con módulo arbitrariamente grandes (Teorema 5.9), y de esta forma concluimos que la región de estabilidad es acotada.

■

5.5. Ejercicio 5.5

Ejercicio 5.5. Consideremos el Método BDF de r pasos

$$\begin{cases} x_0, x_1, \ldots, x_{r-1} \text{ dados} \\ \sum_{k=0}^{r} \alpha_k x_{i+k} = h\beta_r f(t_{i+r}, x_{i+r}), \ i = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

donde $\alpha_r = 1$ y los restantes coeficientes $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_r\}$ se eligen para que el orden del método sea lo mayor posible. Demostrar los siguientes resultados:

a) Cuando $r = 2$ se tiene que $\alpha_0 = \frac{1}{3}, \alpha_1 = -\frac{4}{3}$ y $\beta_2 = \frac{2}{3}$.

b) El método que definen los coeficientes anteriores es de orden 2, estable y convergente.

c) La región de estabilidad del método anterior contiene la semirrecta $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\}$.

Solución.

a) Si $r = 2$, el método es

$$x_{i+2} + \alpha_1 x_{i+2} + \alpha_0 x_i = h\beta_2 f_{i+2}$$

Imponemos que tenga orden máximo anulando los c_k que se calculan mediante (3.4) hasta obtener un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{aligned} c_0 = 0 &\implies \alpha_0 + \alpha_1 + 1 = 0 \\ c_1 = 0 &\implies \alpha_1 + 2 - \beta_2 = 0 \\ c_2 = 0 &\implies \alpha_1 + 4 - 4\beta_2 = 0 \end{aligned}$$

de forma que al resolverlo obtenemos que $\alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{4}{3}$ y $\beta_2 = \frac{2}{3}$.

b) Para ver que tiene orden 2 seguimos calculando

$$c_3 = \frac{1}{3!}\left(\alpha_1 + (\alpha_2 - 3\beta_2)2\right) = \frac{1}{3!}\left(-\frac{4}{3} + \left(2 - 3\frac{2}{3}\right)4\right) = -\frac{4}{18} \neq 0$$

luego efectivamente el método tiene orden 2. Esto prueba que es consistente, para ver que es convergente faltaría probar que es 0-estable El polinomio $\varrho(z)$ viene dado en este caso por

$$\varrho(z) = z^2 - \frac{4}{3}z - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(3x^2 - 4z - 1\right)$$

que tiene raíces $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{3}$. Así, por la *condición de Dahlquist* el método es 0-estable y por tanto convergente.

■

Capítulo 6

Problemas de Contorno

6.1. Ejercicio 6.1

Ejercicio 6.1. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) - x'(t) = 0, \ t \in [0, T] \\ x(0) = 0 \\ x(T) = \beta \end{cases} \tag{6.1}$$

Hallar los valores de $T > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que el problema (6.1):

a) No tenga solución.

b) Tenga, exactamentem una solución.

c) Tenga infinitas soluciones.

Solución. El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial $-x''(t) - x(t) = 0$ es

$$\mu^2 + 1 = 0$$

que tiene como soluciones $\mu = \pm i$, de forma que la solución general es

$$x(t) = A \sin t + B \cos t$$

Ahora bien, si imponemos la condición $x(0) = 0$ obtenemos que

$$B \cos 0 = B = 0$$

de forma que nos queda que la solución es

$$x(t) = A \sin t$$

Por otro lado, puesto que $x(T) = \beta$ distinguimos varios casos en función de los posibles valores de la constante

$$A = \frac{\beta}{\sin T}$$

- Si $\sin T \neq 0$, es decir, $T \neq k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que existe un único valor de A y que por tanto la solución de (6.1) es única.
- Si $\sin T = 0$, es decir, $T = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tenemos dos posibles casos:
  - Si $\beta \neq 0$ el problema no tiene solución.
  - Si $\beta = 0$ cualquier valor de A es válido y obtendríamos por tanto una familia de soluciones

$$x(t) = \lambda \sin t, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

■

6.2. Ejercicio 6.2

Ejercicio 6.2. Repetir el Ejercicio 1 para el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + x(t) = 0, \ t \in [0, T] \\ x(0) = 0 \\ x(T) = \beta \end{cases}$$

¿Qué ocurre?

Solución. Procedemos como en el ejercicio anterior. El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial $-x''(t) + x(t) = 0$ es

$$\mu^2 - 1 = 0$$

que tiene como soluciones $\mu = \pm 1$, de forma que la solución general del problema de contorno (6.1) es

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{-t}$$

Ahora, imponiendo la condición de contorno $x(0) = 0$ obtenemos que

$$A + B = 0$$

de forma que $A = -B$ y así

$$x(t) = A\left(e^{-t} + e^{t}\right) = 2A \sinh t$$

Por otro lado, puesto que $x(T) = \beta$, distinguimos varios casos en función de los posibles valores de la constante

$$A = \frac{\beta}{2 \sinh T}$$

- Si $\beta = 0$ tenemos que, puesto que $\sinh t = 0$ si y sólo si $t = 0$ y no es el caso, se obtiene la solución trivial $x(t) \equiv 0$ y ninguna más que esa.
- Si $\beta \neq 0$ tenemos sin embargo que la constante A está perfectamente definida y que por tanto, el problema (6.1) tiene solución única.

■

6.3. Ejercicio 6.3

Ejercicio 6.3. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), \ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ \mu x(T) + x'(T) = \beta \end{cases} \tag{6.2}$$

donde $p, q, r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$. Como es sabido, el *problema homogéneo* asociado a (6.2) es el que se obtiene poniendo $r(t) \equiv 0$ y $\alpha = \beta = 0$.

a) Utilizando el *Método de tiro* lineal, probar que se da la siguiente alternativa:

   I) o bien el problema homogéneo tiene como única solución la trivial $x(t) \equiv 0$ (en cuyo caso, para toda función $r(t)$ y valores arbitrarios $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el problema de contorno (6.2) tiene una única solución).

II) o bien el problema homogéneo tiene soluciones distintas a la trivial (en cuyo caso, el problema de contorno (6.2) o bien tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna).

b) Demostrar que si $\mu \geq 0$ y $q(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, T]$ se da la situación del subapartado 1. Mostrar, con un ejemplo concreto, que lo anterior no es cierto, en general, si la función $q(t)$ es negativa.

Solución.

a) Puesto que conocemos el valor de $x(t_0)$ el *Método de tiro* lineal consiste en conjeturar el valor de $x'(t_0)$, de forma que tomando un parámetro $s \in \mathbb{R}$ hacemos que $x'(t_0) = s$ y, considerando el problema auxiliar

$$\begin{cases} -y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), \ t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = s \end{cases} \tag{6.3}$$

intentamos determinar s de forma que

$$\mu t(T; s) + y'(T; s) = \beta \tag{6.4}$$

y por tanto, la solución o soluciones de (6.2) vendrán dadas por

$$x(t) = y(t; s)$$

Por tratarse de un problema lineal, la solución $t(t; s)$ de (6.3) se puede escribir como

$$y(t; s) = y_1(t) + sy_2(t) \ t \in [t_0, T]$$

donde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} -y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = r(t), \ t \in [t_0, T] \\ y_1(t_0) = \alpha \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

y

$$\begin{cases} -y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0, \ t \in [t_0, T] \\ y_2(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases} \tag{6.6}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \beta = \mu y(T; s) + y'(T; s) &= \mu \left(y_1(T) + sy_2(T)\right) + \left(y_1'(T) + sy_2'(T)\right) \\ &= \left(\mu y_1(T) + y_1'(T)\right) + s\left(y_2(T) + y_2'(T)\right) \end{aligned}$$

de forma que despejando s en la ecuación anterior obtenemos

$$s = \frac{\beta - (\mu y_1(T) + y_1'(T))}{y_2(T) + y_2'(T)}$$

y distinguimos varios casos:

- $y_2(T) + y_2'(T) \neq 0$, en cuyo caso la ecuación (6.4) tiene un única solución
$$\hat{s} = \frac{\beta - (\mu y_1(T) + y_1'(T))}{y_2(T) + y_2'(T)}$$
y la solución del problema (6.2) viene dada por
$$x(t) = y(t; s) = y_1(t) + \hat{s} y_2(t) = y_1(t) + \frac{\beta - (\mu y_1(T) + y_1'(T))}{y_2(T) + y_2'(T)} y_2(t)$$
- $y_2(T) + y_2'(T) = 0$. De nuevo se pueden presentar dos casos:
  - $\beta \neq \mu y_1(T) + y_1'(T)$, en cuyo caso la ecuación (6.4) no tiene solución, por lo que el problema de contorno (6.2) no tiene solución.
  - $\beta = \mu y_1(T) + y_1'(T)$, en cuyo caso tenemos infinitas soluciones para la ecuación (6.4), y por tanto obtenemos una familia infinita de soluciones para el problema de contorno (6.2)
$$x(t) = y_1(t) + \lambda y_2(t),\ t \in [t_0, T], \lambda \in \mathbb{R}$$

Hemos probado entonces el siguiente resultado:

Teorema. *Sean $p, q \in \mathcal{C}([t_0, T])$. Se tiene la siguiente alternativa:*

a) O $y_2(T) + y_2'(T) = 0$, en cuyo caso el problema de contorno tiene una única solución para todo $r \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) O $y_2(T) + y_2'(T) = 0$, en cuyo caso el problema tiene infinitas soluciones cuando $\beta = \mu y_1(T) + y_1'(T)$ o ninguna en caso contrario.

Consideremos ahora el problema homogéneo
$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0,\ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = 0 \\ \mu x(T) + x'(T) = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$
y veamos que una condición necesaria y suficiente para que $y_2(T) + y_2'(T) \neq 0$ es que (6.7) tenga como única solución la solución trivial.

Supongamos primero que $y_2(T) + y_2'(T) \neq 0$ y sea $x(t)$ una solución de (6.7). Denotemos
$$\gamma = x'(t_0)$$
Tenemos entonces que $x(t)$ también es solución de
$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0,\ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = \gamma \end{cases}$$
y por tratarse de nuevo de problemas lineales, $x(t) = \gamma y_2(t)$. En particular, cuando $t = T$ tenemos que
$$0 = \mu x(T) + x'(T) = \gamma\left(\mu y_2(T) + y_2'(T)\right)$$
Así, puesto que $y_2(T) + y_2'(T) \neq 0$ tenemos que $\gamma = 0$ y por tanto, que $x(t) \equiv 0$.

Recíprocamente supongamos que $y_2(T) + y_2'(T) = 0$ y lleguemos a contradicción. Si fuese $y_2(T) + y_2'(T) = 0$, tendríamos que $y_2(t)$ sería solución de (6.7), luego por hipótesis, $y_2(t) \equiv 0$, lo que contradice que $y_2'(t_0) = 1$. Hemos demostrado así la alternativa del enunciado.

Teorema (Alternativa de Fredholm)**.** *Sean $p, q \in \mathcal{C}([t_0, T])$. Se tiene la siguiente alternativa:*

I) *O bien el problema homogéneo tiene como única solución la trivial $x(t) \equiv 0$ (en cuyo caso, para toda función $r(t) \in \mathcal{C}([t_0, T])$ y cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el problema de contorno* (6.2) *tiene una única solución).*

II) *O bien el problema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial (en cuyo caso, el problema de contorno* (6.2) *o tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna).*

■

6.4. Ejercicio 6.4

Ejercicio 6.4. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + \lambda x(t) = r(t), \ t \in [0,1] \\ x(0) = \alpha \\ x'(1) = \beta \end{cases} \tag{6.8}$$

Utilizando el Teorema de la *Alternativa de Fredholm* encontrar, justificadamente, todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema (6.8) tiene una única solución para toda función $r \in \mathcal{C}([0,1])$ y valores arbitrarios $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución. Por la *Alternativa de Fredholm* sabemos que (6.8) tiene solución única si y sólo si la única solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} -x''(t)`\lambda x(t) = 0, \ t \in [0,1] \\ x(0) = 0 \\ x'(1) = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

es la trivial. Ahora, si $x''(t) - \lambda x(t) = 0$, el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\mu^2 - \lambda = 0$$

que tiene como raíces $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$. Distinguimos varios casos:

I) $\lambda > 0$. En este caso, sea $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $\eta^2 = \lambda$. La solución general de (6.9) es

$$x(t) = Ae^{\eta t} + Be^{-\eta t}$$

e imponiendo las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = A + B = 0$$

de forma que $A = -B$, y puesto que entonces

$$x'(t) = A\left(\eta e^{\eta t} + \eta e^{-\eta t}\right) = A\eta\cosh(\eta t)$$

y el coseno hiperbólico no se anula, se tiene que $A = 0$ de forma que la solución obtenida es la trivial $x(t) \equiv 0$.

II) $\lambda = 0$. En este caso tenemos que

$$x''(t) = 0$$

de forma que

$$x(t) = At + B$$

e imponiendo las condiciones iniciales se ve que $x(0) = B = 0$ y $x'(1) = A = 0$ de forma que nuevamente la solución obtenida es la trivial $x(t) \equiv 0$.

III) $\lambda < 0$. Sea η tal que $\lambda = -\eta^2$. La solución general de (6.9) viene en este caso dada por

$$x(t) = A \sin \eta t + B \cos \eta t$$

de forma que

$$x(0) = B = 0$$

y por tanto $x'(t) = A \sin \eta t$. Tenemos que

$$x'(t) = -A\eta \cos \eta t$$

y así, para que $x'(1) = 0$ se tiene que tener que

$$\cos \eta = 0$$

de forma que $\eta = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Así, para que haya una solución diferente a la trivial tendremos que

$$\lambda = -\eta^2 = -\frac{(2k-1)^2}{4}$$

de forma que si queremos que el problema (6.9) tenga solución única, hay que exigir que la ecuación anterior para λ no se cumpla.

■

6.5. Ejercicio 6.5

Ejercicio 6.5. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + x(t) = r(t), \ t \in [0,1] \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \tag{6.10}$$

donde $r \in \mathcal{C}([0,1])$. Si se aplica el *Método de las Diferenciasl Finitas*, la solución aproximada del problema (6.10) se obtiene al resolver el sistema lineal

$$A_h X_h = b_h$$

donde el vector b_h depende de la función $r(t)$.

a) Determinar la matriz A_h y el vector b_h correspondientes al problema (6.10) y justificar que la matriz A_h es invertible para cualquier valor $h > 0$.

b) Si los valores de la función $r(t)$ sólo pueden calcularse de forma aproximada como

$$r*(t) = r(t) + \delta(t)$$

y si X_h^* es la solución del sistema correspondiente

$$A_h X_h^* = b_h^*$$

demostrar que

$$\left|\left|X_h - X_h^*\right|\right|_\infty \leq ||\delta||_\infty$$

Solución.

La matriz A_h viene dada por

$$A_h = \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & -b_3 & a_3 & -c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_N & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{pmatrix}$$

En nuestro caso $p(t) = 0$ y $q(t) = 1$ luego tenemos que $p_i = 0$ para todo i y de esta forma

$$c_i = b_i = \frac{1}{h^2}$$

y además

$$a_i = \frac{2+h^2}{h^2} = \frac{2}{h^2} + 1$$

para todo i. De esta forma, la matriz A_h es

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2+h^2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

Para ver que efectivamente es invertible comprobamos que es de diagonal estrictamente dominante. Para el primer nodo $i = 1$ tenemos que

$$\left|\frac{2}{h^2} + 1\right| = \frac{2}{h^2} + 1 > \left|-\frac{1}{h^2}\right| = \frac{1}{h^2}$$

Para los nodos $i = 2, \ldots, N-1$ tendremos que

$$\left|\frac{2}{h^2} + 1\right| = \frac{2}{h^2} + 1 > \left|-\frac{1}{h^2}\right| + \left|-\frac{1}{h^2}\right| = \frac{2}{h^2}$$

y finalmente para el nodo $i = N$

$$\left|\frac{2}{h^2} + 1\right| = \frac{2}{h^2} + 1 > \left|-\frac{1}{h^2}\right| = \frac{1}{h^2}$$

de forma que la matriz es invertible. Por otro lado, como $\alpha = 0, \beta = 1$ la matriz b_h que viene dada por

$$b_h = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta c_N \end{pmatrix}$$

se escribe

$$b_h = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos que

$$b_h^* = \begin{pmatrix} r_1^* \\ r^* - 2 \\ \vdots \\ r_N^* \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + \delta(t_1) \\ r_2 + \delta(t_2) \\ \vdots \\ r_N + \delta(t_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} = r_h + \delta$$

donde

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta(t_1) \\ \delta(t_2) \\ \vdots \\ \delta(t_N) \end{pmatrix}$$

Y así,

$$\left(2 + h^2\right) \left|\left|X_h - X_h^*\right|\right| - 2\left|\left|X_h - X_h^*\right|\right|_\infty \leq h^2 ||\delta||_\infty$$

luego

$$h^2 \left|\left|X_h - X_h^*\right|\right|_\infty \leq h^2 ||\delta||_\infty$$

y finalmente

$$\left|\left|X_h - X_h^*\right|\right| \leq ||\delta||_\infty$$

■

6.6. Ejercicio 6.6

Ejercicio 6.6. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + q(t)x(t) = r(t), \ t \in [y_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ \mu x(T) + x'(T) = \beta \end{cases} \tag{6.11}$$

donde $q, r \in \mathcal{C}\left([t_0, T]\right), q(t) \geq 0$ para todo $[t_0, T], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mu \geq 0$.

a) Mediante un desarrollo de Taylor, probar que

$$x'(T) = \frac{x(t) - x(T - h)}{h} + \frac{h}{2} x''(\nu)$$

con $\nu \in (T - h, T)$.

b) A partir de la aproximación mediante diferencias finitas centrales

$$x''(t_i) = \frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\mu_i) \tag{6.12}$$

con $\nu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, N$, aplicar el *Método de las Diferencias Finitas* para obtener un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas. Utilizar el apartado a) y la condición de contorno en el extremo de la derecha para obtener la ecuación que falta con vistas a obtener un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas. Probar que el vector $X = (x(t_1), \ldots, x(t_{N+1}))^T$ es solución del sistema

$$A_h X = b_h + \tau(h) \tag{6.13}$$

donde A_h es una matriz diagonal, b_h es un vector que depende de $\{r(t_i), \alpha, \beta, h\}$ y $\tau(h)$ es un vector que contiene los errores en las aproximaciones.

c) Demostrar que la matriz A_h es invertible.

d) Comprobar que $||\tau(h)||_\infty = O(h)$. Esta mala propiedad proviene del modo de discretizar la condición de contorno en $t = T$.

Solución.

a) Mediante Taylor, tenemos que

$$x(T-h) = x(T) - hx'(T) + \frac{h^2}{2}x''(\nu)$$

donde $\nu \in (T-h, T)$. De esta forma, despejando $x'(T)$ llegamos a que

$$x'(T) = \frac{x(T) - x(T-h)}{h} + \frac{h}{2}x''(\nu)$$

b) Utilizando las aproximaciones mediante diferencias finitas centrales tenemos que, para el primer nodo ($i = 0$) se tiene la ecuación

$$-\frac{x(t_0) - 2x(t_1) + x(t_2)}{h^2} + q(t_1)x(t_1) = r_1 + \tau(t_1, h)$$

Ahora, para $i = 2, \ldots, N$ tenemos que

$$-\frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2} + q(t_i)x(t_i) = r_i + \tau_i(h)$$

y finalmente, utilizando la condición de contorno, puesto que $\mu x(T) + x'(T) = \beta$ tenemos que

$$\mu x(T) + \frac{x(T) - x(T-h)}{h} = \beta - \frac{h}{2}x''(\mu)$$

o utilizando la notación en nodos, para el nodo $N+1$ tenemos que

$$\mu x(t_{N+1}) + \frac{x(t_{N+1}) - x(t_N)}{h} = \beta - \frac{h}{2}x''(\nu)$$

Ahora, agrupamos con lo que va con cada nodo. Tenemos así que para $i = 0$, teniendo en cuenta que $x(t_0) = \alpha$ llegamos a que

$$x(t_1)\frac{2 + h^2 q(t_1)}{h^2} - x(t_2)\frac{1}{h^2} = \alpha + r_1 + \tau(t_1, h)$$

Para $i = 2, \dots, N$

$$-\frac{1}{h^2}x(t_{i-1}) + x(t_i)\frac{2+h^2q(t_i)}{h^2} - x(t_{i+1})\frac{1}{h^2} = r_i + \tau_i(h)$$

Y finalmente para el nodo final tenemos que

$$-x(t_N)\frac{1}{h} + x(t_{N+1})\left(\mu + \frac{1}{h}\right) = \beta - \frac{h}{2}x''(\nu)$$

Este sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas lo podemos escribir de forma matricial como $A_hX_h = b_h + \tau(h)$ donde

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2+h^2q_i}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2q_i}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & -\frac{1}{h^2}x(t_{N-1}) & \frac{2+h^2q_N}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & & -\frac{1}{h} & \mu+\frac{1}{h} & \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+h^2q_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2+h^2q_N & -1 & \\ & & -h & h^2\left(\mu+\frac{1}{h}\right) & \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el vector b_h y el vector de errores vienen dados por

$$b_h = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau_1(t_1,h) \\ \tau(t_2,h) \\ \vdots \\ \tau(t_N,h) \\ \tau(t_{N+1},h) \end{pmatrix}$$

c) Para ver que la matriz es invertible, veamos que es de diagonal fuertemente dominante. Para la primera fila, puesto que $q(t) \geq 0$ tenemos que

$$|a_{11}| = |2+h^2q_1| = 2+h^2q_1 > 1 = |a_{12}|$$

Ahora, puesto que es tridiagonal y los elementos de la sub y súper diagonal son no nulos, la matriz es invertible.

d) El error local de truncamiento asociado es el obtenido al aproximar $x''(t)$ con la aproximación mediante diferencias finitas centrales y al aproximar $x'(T)$ mediante el desarrollo de Taylor de orden 1. Así, tendremos que

$$\tau(t,h) = \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\eta) - \frac{h}{2}x''(\theta)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(h) = ||\tau(t,h)||_\infty &\leq \frac{h^2}{12}||x^{iv)}(\eta)|| + \frac{h}{2}||x''(\theta)|| \\ &\leq \frac{h^2}{12}M_4 + \frac{h}{2}M_2 \\ &\sim O(h) \end{aligned}$$

■

6.7. Ejercicio 6.7

Ejercicio 6.7. Empleando la misma notación del **Ejercicio 6.6**, se introduce el nodo artificial $t_{N+2} = T + h$ y la incógnita adicional $x(t_{N+2})$.

a) Mediante un desarrollo de Taylor, probar que

$$x'(T) = \frac{x(T+h) - x(T-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x'''(\zeta)$$

para cierto $\zeta \in (T-h, T+h)$.

b) A partir de la aproximación (6.12), aplicar el *Método de las Diferencias Finitas* para obtener un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+2$ incógnitas, $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{n+2})\}$. Utilizar al apartado a) y la condición de contorno en el extremo de la derecha para hallar una nueva ecuación y obtener un sistema de $N+2$ ecuaciones con $N+2$ incógnitas. Probar que el vector $X = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{N+2}))^T$ es solución del sistema (6.13) donde A_h es una adecuada matriz (que, esta vez, no es tridiagonal), b_h es un vector que depende de $\{r(t_i), \alpha, \beta, h\}$ y $\tau(h)$ es un vector que contiene los errores en las aproximaciones por diferencias finitas.

c) Comprobar que $||\tau(h)||_\infty = O(h^2)$.

d) Despejar de la última ecuación del sistema anterior la incógnita $x(t_{N+2})$ y obtener un sistema equivalente al anterior, de $N+1$ ecuaciones y $N+1$ incógnitas

$$\tilde{A}_h\tilde{X} = \tilde{b}_h + \tilde{\tau}(h) \tag{6.14}$$

donde $\tilde{X} = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{N-1}))^T$ y $\hat{A}_h$ es una matriz tridiagonal. El sistema (6.14) es el que suele resolverse en la práctica. ¿Es $\tilde{\tau}(h)$ del mismo orden que $\tau(h)$?

e) Demostrar que la matriz $\tilde{A}_h$ es invertible.

f) En el caso de que $\mu > 0$ y $q(t) \geq q_{\min} > 0$ para todo $[t_0, T]$, obtener una estimación del error que se comete sobre los valores exactos al resolver el sistema

$$\tilde{A}_h\tilde{X}_h = \tilde{b}_h$$

g) Repetir los apartados anteriores cuando la ecuación diferencial del problema de contorno (6.11) es

$$-x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t)$$

Solución.

a) Para resolver el primer apartado, realizamos desarrollos de Taylor de orden 3 para $x(T+h)$ y $x(T-h)$ de forma que

$$x(T+h) = x(T) + hx'(T) + \frac{h^2}{2}x''(T) + \frac{h^3}{6}x''(\eta)$$
$$x(T-h) = x(T) - hx'(T) + \frac{h^2}{2}x''(T) - \frac{h^3}{6}x'''(\nu)$$

de forma que

$$x(T+h) - x(T-h) = 2hx'(T) + \frac{h^3}{6}\left(x'''(\eta) + x'''(\nu)\right)$$

Ahora, por el Teorema de los valores intermedios tenemos que

$$x'''(\eta) + x'''(\nu) = 2x'''(\zeta)$$

y por tanto

$$x(T+h) - x(T-h) = 2hx'(T) + \frac{h^3}{3}x'''(\zeta)$$

Finalmente, despejando $x'(T)$ obtenemos que

$$x'(T) = \frac{x(T+h) - x(T-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x'''(\zeta)$$

b) Utilizamos de nuevo la aproximación mediante diferencias finitas centrales

$$x''(t_i) = \frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\nu_i)$$

Para el primer nodo ($i = 1$) tenemos que

$$-\frac{x(t_0) - 2x(t_1) + x(t_2)}{h^2} + q(t_1)x(t_1) = r(t_1) + \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\nu_1)$$

Puesto que $x(t_0) = \alpha$ tenemos que la ecuación anterior es equivalente a

$$x(t_1)\frac{2 + h^2 q_1}{h^2} - x(t_2)\frac{1}{h^2} = r_1 + \frac{\alpha}{h^2} + \tau_1(h)$$

donde $q_1 = q(t_1), r_1 = r(t_1)$ y $\tau_1(h) = \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\nu_1)$. Para los nodos $i = 2, \dots, N+1$ (nótese que ya que tenemos un nodo extra t_{N+2} no hay ningún problema) tenemos que

$$-\frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2} + q(t_i)x(t_i) = r(t_i) + \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\nu_i)$$

o equivalentemente

$$-x(t_{i-1})\frac{1}{h^2} + x(t_i)\frac{2 + h^2 q_i}{h^2} - \frac{x(t_{i+1})}{h^2} = r_i + \tau_i(h)$$

Finalmente, utilizando la condición de contorno tenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \mu x(T) + x'(T) \\ &= \mu x(t_{N+1}) + \frac{x(t_{N+2})}{2h} - \frac{x(t_N)}{2h} - \frac{h^2}{6}x'''(\zeta) \end{aligned}$$

de forma que reorganizando los términos obtenemos la ecuación

$$-\frac{1}{2h}x(t_N) + \mu x(t_{N+1}) + \frac{1}{2h}x(t_{N+2}) = \beta + \frac{h^2}{6}x'''(\zeta)$$

Así, tenemos un sistema de $N+2$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas. En forma matricial podemos expresar este sistema como

$$A_h X = b_h + \tau(h)$$

donde

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2+h^2 q_1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_{N+1}}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & & & -\frac{1}{2h} & \mu & \frac{1}{2h} \end{pmatrix}$$

y

$$b_h = \begin{pmatrix} r_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N+1} \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \tau(h) \begin{pmatrix} \tau_1(h) \\ \tau_2(h) \\ \vdots \\ \tau_{N+1}(h) \\ \frac{h^2}{6}x'''(\zeta) \end{pmatrix}$$

c) Procediendo de la misma manera que en el ejercicio anterior, tenemos que el error de las aproximaciones es

$$\tau(h) = \frac{h^2}{12}x^{iv)}(\nu) + \frac{h^2}{6}x'''(\zeta) = \frac{h^2}{12}\left(x^{iv)}(\nu) + 2x'''(\zeta)\right)$$

Así, tomando la norma infinito tendremos que

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(h) = ||\tau(h)||_\infty &\leq \frac{h^2}{12}\left(||x^{iv)}(\nu)|| + 2||x'''(\zeta)||\right) \\ &\leq \frac{h^2}{12}(M_4 + 2M_3) \\ &\sim O(h^2) \end{aligned}$$

d) Si despejamos $x(t_{N+2})$ en la ultima ecuación tenemos que

$$\frac{1}{2h}x(t_{N+2}) = \beta + \frac{h^2}{6}x'''(\zeta) + \frac{1}{2h}x(t_N) - \mu x(t_{N+1})$$

de forma que

$$x(t_{N+2}) = 2h\beta + \frac{h^3}{3}x'''(\zeta) - 2h\mu x(t_{N+1}) + x(t_N)$$

Ahora, sustituyendo en la penúltima ecuación queda que

$$\begin{aligned} -x(t_N)\frac{1}{h^2}&+x(t_{N+1})\frac{2+h^2q_{N+1}}{h^2} - \frac{1}{h^2}\left[2h\beta + \frac{h^3}{3}x'''(\zeta) + x(t_N) - 2hx(t_{N+1})\right] \\ &= -x(t_N)\frac{1}{h^2} + x(t_{N+1})\frac{2+h^2q(t_N)}{h^2} - \frac{2\beta}{h} - \frac{h}{3}x'''(\zeta) - \frac{x(t_N)}{h^2} + \frac{2\mu}{h}x(t_{N+1}) \\ &= -x(t_N)\frac{2}{h^2} + x(t_{N+1})\left(\frac{2 - h^2q(t_{N+1}) + 2h\mu}{h^2}\right) \\ &= \frac{2\beta}{h} + \frac{h}{3}x'''(\zeta) + r(t_{N+1}) + \tau_{N+1}(h) \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos ahora un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas, que se puede escribir en forma matricial como

$$\tilde{A}_h\tilde{X}_h = \tilde{b}_h + \tilde{\tau}(h)$$

donde

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} \frac{2+h^2q_1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2q_2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2q_N}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & & -\frac{2}{h^2} & \frac{2+h^2q_{N+1}+2h\mu}{h^2} \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{b}_h = \begin{pmatrix} r_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \\ r_{N+1} + \frac{2\beta}{\mu} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}(h) = \begin{pmatrix} \tau_1(h) \\ \tau_2(h) \\ \vdots \\ \tau_N(h) \\ \frac{h}{3}x'''(\zeta) + \tau_{N+1}(h) \end{pmatrix}$$

e) Para ver que es invertible, veamos que satisface las hipótesis del **Lema 6.17**. Primero, la matriz $\hat{A}_h$ es de diagonal fuertemente dominante, pues es de diagonal dominante ya que como $q_i \geq 0, \mu > 0$ tenemos que

- $\left|\frac{2+h^2q_1}{h^2}\right| = \frac{2+h^2q_1}{h^2} \geq \frac{2}{h^2} > \frac{1}{h^2} = \left|-\frac{1}{h^2}\right|$
- $\left|\frac{2+h^2q_1}{h^2}\right| = \frac{2+h^2q_1}{h^2} \geq \frac{2}{h^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} = \left|-\frac{1}{h^2}\right| + \left|-\frac{1}{h^2}\right|$
- $\left|\frac{2+h^2q_{N+1}+2h\mu}{h^2}\right| = \frac{2+h^2q_{N+1}+2h\mu}{h^2} \geq \frac{2}{h^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} = \left|-\frac{1}{h^2}\right| + \left|-\frac{1}{h^2}\right|$

Además, existe un i_0, en este caso $i_0 = 1$ de forma que $|a_{i_0 i_0}|$ es estrictamente mayor que la suma de los elementos de la fila distintos a él. Así hemos demostrado que $\tilde{A}_h$ es de diagonal fuertemente dominante. Ahora, puesto que es tridiagonal y los elementos de la sub y súper diagonal son todos no nulos concluimos que la matriz $\tilde{A}_h$ es invertible.

■

Capítulo 7

Examen Junio 2017

Ejercicio 7.1 (**3 Puntos**)**.** Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t),\ t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

a) Si $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es la sucesión que se obtiene cuando se aplica el método de Euler explícito con un paso de discretización $h > 0$ (que se supone fijo) y con $x_0 = 1$, calcula el valor de x_i con $i \in \mathbb{N}$ arbitrario.

b) ¿Cuáles son los valores x_1, x_2 y x_3 cuando $h = \frac{3}{2}$?

c) Si x es la solución exacta del problema (7.1), ¿qué debe cumplir h para que $\lim_{i\to+\infty} x_i = \lim_{t\to+\infty} x(t)$?

d) ¿Qué debe cumplir h para que, además de la condición dada en el apartado c), se cumpla que $x_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$?

En todos los apartados anteriores se debe justificar la respuesta.

Solución.

a) El Método de Euler explícito viene dado por

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

En nuestro caso $f(t_i, x_i) = f(x_i) = -2x_i$. Calculamos ciertos valores de x_i pequeños para hacernos una idea de cómo va a ser el término general. Tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - 2hx_0 = 1 - 2h \\ x_2 &= x_1 - 2hx_1 = (1-2h) - 2h(1-2h) \\ &= (1-2h)^2 \\ x_3 &= x_2 - 2hx_2 = (1-2h)^2 - 2h(1-2h)^2 \\ &= (1-2h)^3 \end{aligned}$$

Así, vemos que en general

$$x_i = (1-2h)^i$$

Lo probamos por inducción sobre $i \in \mathbb{N}$. El caso base ya está demostrado así que suponemos cierto el resultado para $i = k$ y lo probamos para $i = k+1$. Tenemos que

$$x_{k+1} = x_k - 2hx_k = (1-2h)^k - 2h(1-2h)^k = (1-2h)^{k+1}$$

y queda demostrado.

b) Sustituyendo en los tres valores x_1, x_2 y x_3 con el paso h que nos dan obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2\frac{3}{2} = -2 \\ x_2 &= \left(1 - 2\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \\ x_3 &= \left(1 - 2\frac{3}{2}\right)^3 = -8 \end{aligned}$$

c) La solución exacta del problema (7.1) es

$$x(t) = e^{-2t}$$

de forma que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$$

De esta forma, queremos imponer que

$$\lim_{i\to+\infty} x_i = \lim_{i\to+\infty} (1-2h)^i = 0$$

Esto lo conseguiremos si y sólo si $|1-2h| < 1$. En otras palabras, si

$$-1 < 1 - 2h < 1$$

lo que ocurre si y sólo si $0 < h < 1$.

d) Para que x_i sea además mayor que 0 para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que tener que $1-2h > 0$, es decir que $h < \frac{1}{2}$. Por tanto imponiendo esta condición y la de la solución del apartado c) tenemos que el paso h debe satisfacer

$$0 < h < \frac{1}{2}$$

■

Ejercicio 7.2 (**3 Puntos**). Hallar la región de estabilidad absoluta del método

$$x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

¿Es A-estable?

Solución. Consideramos el problema de valor inicial escalar

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t), \ t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y hallemos la función de amplificación (o de estabilidad) del método del enunciado. Esta es una función $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de forma que

$$x_{i+1} = (R(\lambda h))^i \, x_0 \tag{7.2}$$

Tenemos que

$$x_{i+1} = x_i + h\lambda\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

de forma que despejando x_{i+1} queda

$$x_{i+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 + \frac{\lambda h}{2}} x_i$$

Así, nuestra candidata a función de amplificación es

$$R(\lambda h) = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}$$

Probemos por inducción que $R(\lambda h)$ satisface la relación (7.2). El caso base es $i = 0$ que se cumple trivialmente. Suponiendo cierto el resultado para $i = k$ tenemos que para $i = k + 1$ se tiene

$$x_{k+1} = R(\lambda h) x_k = R(\lambda h) \left(R(\lambda h)\right)^k x_0 = \left(R(\lambda h)\right)^{k+1} x_0$$

y queda demostrado. Así, la región de estabilidad absoluta del método es

$$\mathcal{R} = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| < 1 \right\}$$

Para ver que el método es efectivamente A-estable tenemos que comprobar que la región $\mathcal{R}$ contiene al semiplano complejo $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Ahora bien, de la relación

$$\left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| < 1$$

obtenemos que

$$\left| 1 + \frac{z}{2} \right| < \left| 1 - \frac{z}{2} \right|$$

Multiplicando por 2 a ambos lados obtenemos que

$$|2 + z| < |2 - z|$$

Ahora, haciendo $z = a + ib$ tenemos que

$$|2 + a + ib| < |2 - a - ib|$$

y haciendo el módulo obtenemos que

$$\sqrt{(2 + a)^2 + b^2} < \sqrt{(2 - a)^2 + b^2}$$

Elevando al cuadrado queda

$$(2 + a)^2 + b^2 < (2 - a)^2 + b^2$$

y operando

$$4 + a^2 + 4a < 4 + a^2 + 4a$$

es decir, $8a < 0$, desigualdad que se cumple si y sólo si $a < 0$, es decir, si y sólo si $\operatorname{Re}(z) < 0$. De esta forma concluimos que el método es A-estable. ■

Ejercicio 7.3 (**4 Puntos**). Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + q(t)x(t) = r(t), \ t \in [t_0, T] \\ \mu x(t_0) - x'(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta \end{cases} \tag{7.3}$$

donde $q, r \in \mathcal{C}\left([t_0, T]\right)$, $q(t) \geq 0$ para todo $[t_0, T]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mu \geq 0$. Deducir un método de Diferencias Finitas para el problema de contorno (7.3) que sea de orden 2 y mostrar que el sistema lineal que se obtiene tiene un única solución.

Solución. En primer lugar, vamos a añadir un nodo artifical $t_{-1} = t_0 - h$ y una incógnita artificial, $x(t_{-i})$. De esta forma, haciendo desarrollos de Taylor tenemos que

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{h^2}{2}x''(t_0) + \frac{h^3}{6}x'''(\xi)$$
$$x(t_0 - h) = x(t_0) - hx'(t_o) + \frac{h^2}{2}x''(t_0) - \frac{h^3}{6}x'''(\eta)$$

donde $\theta \in (t_0, t_0 + h), \eta \in (t_0 - h, t_0)$. Restando ambas ecuaciones obtenemos que

$$x(t_0 + h) - x(t_0 - h) = 2hx'(t_0) + \frac{h^3}{6}\left(x'''(\xi) + x'''(\eta)\right)$$

Ahora, por el Teorema de los Valores intermedios, tenemos que existe $\eta < \zeta < \xi$ de forma que

$$\frac{x'''(\xi) + x'''(\eta)}{2} = x'''(\zeta)$$

Así, podemos despejar $x'(t_0)$ y obtenemos que

$$x'(t_0) = \frac{x(t_0 + h) - x(t_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}x'''(\zeta)$$

Por otro lado, queremos aproximar la segunda derivada, $x''(t)$. De nuevo utilizamos desarrollos de Taylor

$$x(t + h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \frac{h^3}{6}x'''(t) + \frac{h^4}{24}x^{iv)}(\theta)$$
$$x(t - h) = x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) - \frac{h^3}{6}x'''(t) + \frac{h^4}{24}x^{iv)}(\overline{\nu})$$

donde $\nu \in (t - h, t)$ y $\overline{\nu} \in (t, t + h)$. Así, sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$x(t + h) + x(t - h) = 2x(t) + h^2x''(t) + \frac{h^4}{24}\left(x^{iv)}(\theta) + x^{iv)}(\overline{\nu})\right)$$

De nuevo por el Teorema de los Valores Intermedios, tenemos que existe $\overline{\nu} < \nu < \theta$ de form que

$$x^{iv)}(\theta) + x^{iv)}(\overline{\nu}) = 2x^{iv})(\nu)$$

y por lo tanto, despejamos $x''(t)$ para obtener que

$$x''(t) = \frac{x(t - h) - 2x(t) + x(t + h)}{h^2} - \frac{h^4}{12}x^{iv)}(\nu)$$

Particularizando en cada nodo $t_i = t_0 + ih, i = 0, \ldots, N - 1$ obtenemos que

$$x''(t_i) = \frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2} - \frac{h^4}{12}x^{iv)}(\nu)$$

Por otro lado, en el nodo $i = N$ tenemos que

$$-x(t_{N-1})\frac{1}{h^2} + x(t_N)\frac{2 + h^2q_N}{h^2} = r_N + \tau(h) - \frac{\beta}{h^2}$$

donde hemos usado la condición de que $x(t_{N+1}) = \beta$. Asimismo, la condición de contorno $\alpha = \mu x(t_0) + x'(t_0)$ nos dice que, utilizando la expresión hallada para $x'(t_0)$ que

$$\frac{1}{h^2}x(t_{-1}) + \mu x(t_0) - \frac{1}{h^2}x(t_1) = \alpha - \frac{h^2}{6}x'''(\zeta)$$

De esta forma, tenemos un sistema con $N+2$ ecuaciones y $N+2$ incógnitas. De forma matricial la podemos expresar como $A_h X = b_h + \tau(h)$ donde

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & \mu & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_0}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_N}{h^2} \end{pmatrix}$$

y

$$b_h = \begin{pmatrix} \alpha \\ r_0 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Ahora, si despejamos $x(t_{-1})$ de la primera ecuación obtenemos que

$$x(t_{-1}) = \alpha h^2 + \frac{h^4}{6} x'''(\zeta) - h^2 \mu x(t_0) + x(t_1)$$

y al sustituir esta expresión en la segunda ecuación queda

$$\frac{1}{h^2}\left(-\alpha h^2 + \frac{h^4}{6} x'''(\zeta) + \mu h^2 x(t_0) - x(t_1)\right) + x(t_0)\frac{2+h^2 q_0}{h^2} - x(t_1)\frac{1}{h^2} = r_0 + \tau(h)$$

y operando, queda finalmente

$$x(t_0)\frac{2+h^2 q_0 + h^2\mu}{h^2} - x(t_1)\frac{2}{h^2} = \alpha - \frac{h^2}{6} x'''(\zeta) + r_0 + \tau(h)$$

De esta forma, obtenemos un sistema de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas esta vez, que de forma matricial podemos escribir como $\tilde{A}_h \tilde{X} = \tilde{b}_h + \tilde{\tau}(h)$ donde

$$\tilde{A}_h = \begin{pmatrix} \frac{2+h^2 q_0 + h^2\mu}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2+h^2 q_N}{h^2} \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{b}_h = \begin{pmatrix} \alpha - r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

que se comprueba que es invertible pues es de diagonal fuertemente dominante y los elementos de la sub y súper diagonal son no nulos. ■

Capítulo 8

Examen Septiembre 2017

Ejercicio 8.1 (2'5 Puntos). Se considera un (ϱ, σ)-Método multipaso lineal con $\sigma(z) = z^3$. Encontrar, deduciendo de forma razonada, un polinomio $\varrho(z)$ de grado 3 para que el (ϱ, σ)-Método anterior tenga orden máximo. ¿Cuál es este orden máximo? ¿Es convergente el método obtenido?

Solución. Puesto que $\sigma(z) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k z^k = z^3$, tenemos que el (ϱ, σ)-Método es de 3 pasos y $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$. Así, para que tenga orden máximo, imponemos que los c_k dados en las expresiones (3.4) sean todos cero hasta obtener un sistema de cuatro ecuaciones con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ como incógnitas. Obtenemos así un sistema con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 &= 6 \\ \alpha_1 + 8\alpha_2 + 27\alpha_3 &= 27 \end{aligned}$$

que tiene solución única

$$\boxed{\alpha_0 = -\frac{1}{3}, \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = \frac{11}{6}}$$

de forma que el polinomio que nos piden es

$$\varrho(z) = \frac{11}{6}z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}$$

Veamos ahora cuál es el orden máximo de este (ϱ, σ)-Método. Calculamos c_4 y obtenemos que

$$c_4 = -\frac{1}{6} \neq 0$$

de forma que el orden es 3. Para estudiar la convergencia del (ϱ, σ)-Método, sabemos que convergencia equivale a consistencia y 0-estabilidad. El método es consistente pues tiene orden 3 ($c_0 = c_1 = 0$), así que estudiamos su 0-estabilidad. Trabajamos con el polinomio reducido

$$6\varrho(z) = 11z^3 - 18z^2 + 9z - 2$$

y mediante Fubini calculamos sus raíces, que son

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{7 + \sqrt{39}i}{22}, z_3 = \frac{7 - \sqrt{39}i}{22}$$

Tenemos que ver que z_2 y z_3 están dentro de la bola unidad. Ahora

$$|z_3| = |z_2| = \sqrt{\frac{49 + 39}{22^2}} = \sqrt{\frac{22 \cdot 4}{22^2}} = \sqrt{\frac{4}{22}} < 1$$

pues $\frac{4}{22} < 1$. Así, por la *condición de Dahlquist* el (ϱ, σ)-Método obtenido es 0-estable y por tanto convergente. ∎

Ejercicio 8.2 (2 Puntos). Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{8.1}$$

donde $f \in \mathcal{C}([t_0, T]\times)$ y es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Dado $N \in \mathbb{N}$, se considera la red de puntos de paso $h = \frac{T-t_0}{h}$ formada por los nodos $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, N$.

Para resolver numéricamente el problema (8.1) se considera el método de predicción-corrección $P(EC)E$ en el que se toma como predictor el *método de Heunn* (orden 2)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4}\left(f(t_i, x_i) + 3f\left(t_i + \frac{2h}{3}, x_i + \frac{2h}{3}f(t_i, x_i)\right)\right)$$

y como corrector *método de Simpson* (orden 4)

$$x_{i+2} = x_i + \frac{h}{3}\left(f(t_{i+2}, x_{i+2}) + 4f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_i, x_i)\right)$$

Obtener, justificando la respuesta, el orden del método de predicción-corrección resultante.

Solución. Lo primero es crear un falso método de Heunn de 2 pasos

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{4}\left(f(t_{i+1}, x_{i+1}) + 3f\left(t_i + \frac{5h}{3}, x_{i+1} + \frac{2h}{3}f(t_{i+1}.x_{i+1})\right)\right)$$

El error local de truncamiento de este método es

$$\tau^*(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{4}\left(f(t_{i+1}, x_{i+1}) + 3f\left(t_i + \frac{5h}{3}, x_{i+1} + \frac{2h}{3}f(t_{i+1}.x_{i+1})\right)\right)$$

Por otro lado, el error local del método de Simpson será

$$\tau(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{3}\left(f(t+2h, x(t+2h)) + 4f(t+h, x(t+h)) + f(t, x(t))\right)$$

De esta forma, el error local de truncamiento del método $P(EC)E$ será

$$\tau^{P(EC)E}(t,h) = \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{3}\left(f(t+2h, x^*(t+2h)) + 4f(t+h, x(t+h)) + f(t, x(t))\right)$$

donde $x^*(t+2h)$ es el valor obtenido con el Método de Heunn (predictor). Sumando a esta última expresión la cantidad

$$\frac{1}{3}\left(f(t+2h), x(t+2h)) - f(t+2h, x(t+2h))\right)$$

y reorganizando los términos, tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau^{P(EC)E}(t,h) &= \frac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} - \frac{1}{3}\left(f(t+2h, x(t+2h)) + 4f(t+h, x(t+h)) + f(t, x(t))\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(f(t+2h), x(t+2h)) - f(t+2h, x^*(t+2h))\right) \\
&= \tau(t,h) + \frac{1}{3}\left(f(t+2h), x(t+2h)) - f(t+2h, x^*(t+2h))\right)
\end{aligned}$$

Tomando normas y utilizando el hecho de que la función f es lipschitziana en la segunda variable con constante de lipschitz L, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{P(EC)E}(t,h) &= \left|\left|\tau^{P(EC)E}(t,h)\right|\right| \leq \overline{\tau}(h) + \frac{1}{3}\left|\left|(f(t+2h), x(t+2h)) - f(t+2h, x^*(t+2h)))\right|\right| \\ &\leq \overline{\tau}(h) + \frac{L}{3}\left|\left|x(t+2h) - x^*(t+2h)\right|\right|\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$x^*(t+2h) = x(t+h) + \frac{h}{4}\left(f(t+h, x(t+h)) + 3f\left(t + \frac{5h}{3}, x(t+h) + \frac{2h}{3}f(t+, .x(t+h))\right)\right)$$

de forma que sustituyendo, queda

$$\begin{aligned}\left|\left|x(t+2h) - x^*(t+2h)\right|\right| &= \Bigg|\Bigg| x(t+2h) - x(t+h) \\ &\quad - \frac{h}{4}\left(f(t+h, x(t+h)) + 3f\left(t + \frac{5h}{3}, x(t+h) + \frac{2h}{3}f(t+h, x(t+h))\right)\right)\Bigg|\Bigg| \\ &= h\left|\left|\tau^*(t,h)\right|\right| \\ &= h\overline{\tau}(h)\end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que

$$\begin{aligned}\overline{\tau}^{P(EC)E}(h) &\leq \overline{\tau}(h) + \frac{Lh}{3}\overline{\tau}^*(h) \\ &= O(h^4) + \frac{Lh}{3}O(h^2) \\ &= O(h^4) + O(h^3) \\ &= O(h^3)\end{aligned}$$

y así el método de predicción-corrección resultante tiene orden 3. ■

Ejercicio 8.3 (2'5 Puntos). Se considera de problema de contorno

$$\begin{cases} -x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t), \ t \in [2,5] \\ x'(2) = 6 \\ x(5) + x'(5) = 4 \end{cases} \tag{8.2}$$

donde $p, q, r \in \mathcal{C}([2,5])$.

a) Explicar en qué consiste el *Método de tiro lineal* aplicado al problema (8.2).

b) Enunciar y demostrar la Alternativa de Fredholm para el problema (8.2).

Solución.

a) Puesto que conocemos el valor de $x'(t_0) = x'(2) = 6$, conjeturamos el valor de $x(t_0) = x(2) = s$, donde $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Consideramos el problema auxiliar

$$\begin{cases} -y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), \ t \in [2,5] \\ y(t_0) = y(2) = s \\ y'(t_0) = y'(2) = 6 \end{cases}$$

y los problemas de valor inicial auxiliares

$$\begin{cases} -y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = r(t), \ t \in [2,5] \\ y_1(t_0) = y_1(2) = 0 \\ y_1'(t_0) = y_1'(2) = 6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0, \ t \in [2,5] \\ y_2(t_0) = y_2(2) = 1 \\ y_2'(t_0) = y_2'(2) = 0 \end{cases}$$

de forma que por tratarse de problemas lineales, la solución del problema de contorno inicial (8.2) será

$$x(t) = y(t;s) = y_1(t) + sy_2(t)$$

Imponiendo la condición de contorno sobre el extremo de la derecha tenemos que

$$\begin{aligned} 4 &= x(T) + x'(T) = x(5) + x'(5) \\ &= (y_1(5) + sy_2(5)) + (y_1'(5) + sy_2'(5)) \end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación

$$4 = (y_1(5) + y_1'(5)) + s(y_2(5) + y_2'(5)) \tag{8.3}$$

de forma que despejando s en la ecuación anterior queda

$$s = \frac{4 - (y_1(5) + y_1'(5))}{y_2(5) + y_2'(5)}$$

Distinguimos ahora varios casos en función del valor del denominador en la ecuación anterior.

I) Si $y_2(5) + y_2'(5) \neq 0$ tenemos que sólo hay un posible valor del parámetro s que satisfaga la ecuación (8.3), de forma que la solución del problema de contorno (8.2) será

$$x(t) = y_1(t) + \hat{s}y_2(t)$$

siendo

$$\hat{s} = \frac{4 - (y_1(5) + y_1'(5))}{y_2(5) + y_2'(5)}$$

II) Si $y_2(5) + y_2'(5) = 0$ hay dos opciones:

- Si $4 - (y_1(5) + y_1'(5)) \neq 0$ no hay ningún valor del parámetro $s \in \mathbb{R}$ que satisfaga (8.3). Así, el problema de contorno (8.2) no tiene solución.
- Si $4 - (y_1(5) - y_1'(5)) = 0$, hay infinitos valores del parámetro s que satisfacen (8.3) y por lo tanto el problema de contorno (8.2) tiene infinitas soluciones de la forma

$$x(t) = y_1(t) + sy_2(t)$$

con $s \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Hemos probado así la siguiente alternativa

Teorema. *Sean $p, q, r \in \mathcal{C}([2,5])$:*

a) O $y_2(5)+y_2'(5)\neq 0$*, en cuyo caso el problema de contorno* (8.2) *tiene una única solución.*

b) O $y_2(5)+y_2'(5)=0$*, en cuyo caso el problema de contorno* (8.2) *tiene infinitas soluciones si* $4-(y_1(5)+y_1'(5))=0$ *o ninguna si* $4-(y_1(5)+y_1'(5))\neq 0$*.*

b) Para demostrar la *alternativa de Fredholm*, consideremos el problema homogéneo asociado al problema de contorno (8.2)

$$\begin{cases} -x''(t)+x'(t)p(t)+x(t)q(t)=0, \ t\in[2,5] \\ x'(2)=0 \\ x(5)x'(5)=0 \end{cases} \tag{8.4}$$

Así, la *Alternativa de Fredholm* consiste en lo siguiente:

Teorema (Alternativa de Fredholm)**.** *Sean* $p,q,r\in\mathcal{C}([2,5])$*:*

I*) O el problema homogéneo* (8.4) *tiene como única solución la trivial, en cuyo caso el problema de contorno* (8.2) *tiene solución única.*

II*) O el problema homogéneo* (8.4) *tiene una solución no trivial, en cuyo caso el problema de contorno* (8.2) *tiene infinitas soluciones si* $y_2(5)+y_1'(5)=4$ *o ninguna en caso contrario.*

Veamos el siguiente Lema previo:

Lema. *El problema homogéneo* (8.4) *tiene como única solución la trivial si y sólo si* $y_2(5)+y_2'(5)\neq 0$*.*

Demostración. Sea en primer lugar $x(t)$ solución de (8.4) y veamos que asumiendo que $y_2(5)+y_2'(5)\neq 0$ se ha de tener que $x(t)\equiv 0$. Sea $\gamma=x(t_0)=x(2)$. Tenemos entonces que la solcuión $x(t)$ será también solución del problema

$$\begin{cases} -x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=0, \ t|in[2,5] \\ x(t_0)=x(2)=\gamma \\ x'(t_0)=x'(t_2)=0 \end{cases}$$

De esta forma, por ser problemas lineales, tenemos que $x(t)=\gamma y_2(t)$. Ahora, tenemos que

$$0=x(5)+x'(5)=\gamma(y_2(5)+y_2'(5))$$

de donde deducimos que $\gamma=0$ y que por tanto, $x(t)\equiv 0$.

Recíprocamente, supongamos que $y_2(5)+y_2'(5)=0$ y lleguemos a una contradicción. En este caso, $y_2(t)$ será solución de (8.4) de forma que $y_2(t)\equiv 0$ por hipótesis. Pero $y_2(2)=1$, contradicción. ■

De esta forma, utilizando el la discusión del apartado a) y el Lema anterior, hemos demostrado la *Alternativa de Fredholm* asociada al problema de contorno (8.2).

■